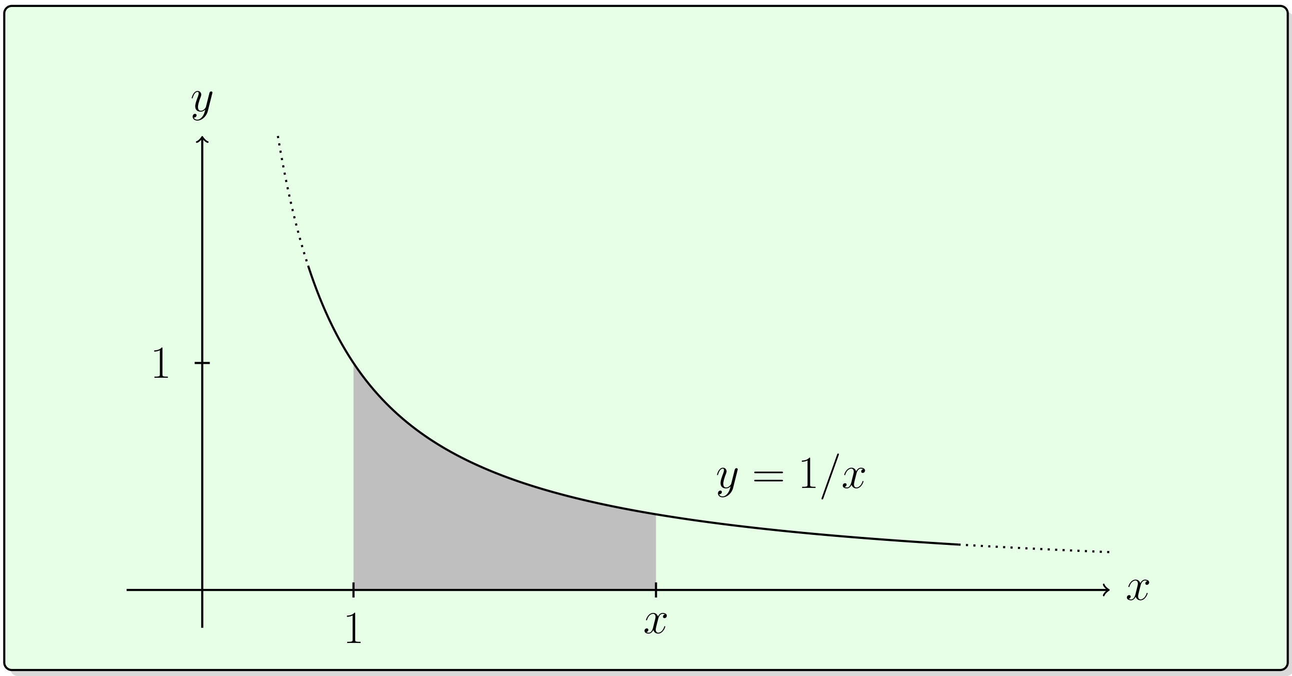
TATB01: Matematisk grundkurs HT2024

Föreläsningsanteckningar för Y, MED, MAT, TMA, Frist

Johan Thim, MAI



23 augusti 2024

Innehåll

Kapitel 1

Notation, logik, ekvationer och polynom

1.1 Logik och vanliga symboler

Lite logik

- **Implikation**: $P \Rightarrow Q$. Detta betyder att om P är sant så är Q sant. Utläses P *medför* Q eller P *implicerar* Q. Exempel: $x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$.
- **Ekvivalens**: $P \Leftrightarrow Q$. Detta betyder att P är sant om och endast om Q sant. Med andra ord: $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$. Exempel: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, dvs $x = 2$ eller $x = -2$.

Logiska utsagor!

Observera att P och Q är **logiska utsagor**. Det är alltså saker som kan vara sanna eller falska. Typiskt för oss är saker som att P till exempel är utsagan att $x = 7$. Detta kan vara sant eller falskt (x kan vara 7 eller något annat). Däremot kan P **inte** vara ett påstående i stil med *röd* eller π. Uttryck av typen $7 \Rightarrow 2$ är nonsens. Samma sak med $(x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1$. Påståendet saknar logisk mening. Även om det i sista exemplet går att gissa vad det skulle betyda så kan man inte skriva så. Använd likhetstecknet när ni menar likhet!

Det finns även speciella mängder av tal (siffror alltså) som vi kommer att använda oss av.

N: De naturliga (hel)talen: $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Z: Alla heltal: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Q: Alla rationella tal, dvs bråk $\dfrac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$.

R: Alla reella tal. Inkluderar **Q** och även alla irrationella tal som $\sqrt{2}$, π, e, etc.

C: Alla komplexa tal $z = a + bi$ där $i^2 = -1$ och $a, b \in \mathbf{R}$.

Se även till att speciellt studera tallinjen och olikheter i boken!

1.2 Ekvationslösning

Oftast när vi försöker lösa en ekvation handlar det om att använda omskrivningar och förenklingar tillsammans med logik för att hitta **alla** lösningar till en given ekvation.

Exempel

Vi ser att

$$\frac{2x-9}{5} = 4x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 9 = 20x \quad \Leftrightarrow \quad -9 = 18x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}.$$

Kontroll: VL $= (2(-1/2) - 9)/5 = -2$ och HL $= 4(-1/2) = -2$. Alltså är $x = -1/2$ en lösning, och eftersom vi har ekvivalenser i alla steg är detta den enda lösningen!

Kontrollen i exemplet är egentligen överflödig då vi räknat med ekvivalens hela vägen. Men, då det alltid finns en risk för slarvfel när man räknar försöker vi alltid att kontrollera våra svar. Det är också värt att lägga på minnet att vissa metoder vi kommer att använda **kräver** en kontroll för att verifiera att ”lösningar” som hittas inte är falska.

Lite repetition av omskrivningar vi sett tidigare.

Vanliga omskrivningar

Kvadratregeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Konjugatregeln: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Kvadratkomplettering: $x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 - (b/2)^2 + c$.

Till exempel kan vi med konjugatregeln reda ut vad som gäller för två tal a och b om $a^2 = b^2$.

Exempel

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b=0 \text{ eller } a-b=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-b \text{ eller } a=b \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b. \end{aligned}$$

Observera att om vi vet mer, till exempel a och b är positiva, så är $a = b$.

Vi har här utnyttjat en mycket användbar princip som gäller för de mängder tal vi betraktar i denna kurs, nämligen att om $ab = 0$ så måste endera $a = 0$ eller $b = 0$. Det enda sättet att få noll ur en produkt är att en av faktorerna är noll.

Kvadratkomplettering är ett verktyg vi kommer att använda ofta. Det mest typiska är nog att helt enkelt lösa en andragradsekvation.

Exempel

Lös $x^2 + 6x + 1 = 0$.

Lösning.
Vi kvadratkompletterar och utnyttjar konjugatregeln:

$$\begin{aligned} x^2+6x+1 &= (x+3)^2-9+1=(x+3)^2-8=(x+3)^2-(\sqrt{8})^2 \\ &= [\text{ konjugatregeln }] = (x+3-\sqrt{8})(x+3+\sqrt{8}). \end{aligned}$$

Alltså måste

$$x^2+6x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+3-\sqrt{8}=0 \text{ eller } x+3+\sqrt{8}=0.$$

Tag för vana att summera resultatet i ett kortfattat men tydligt svar.
Svar: $x=-3\pm\sqrt{8}$ är de enda lösningarna.

Exempel

Bestäm största och minsta värde av $1+x-x^2$.

Vi kvadratkompletterar:

$$1+x-x^2=1-(x^2-x)=1-((x-1/2)^2-(1/2)^2)=\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Här ser vi tydligt att uttrycket som störst blir $5/4$, vilket inträffar endast då $x=1/2$. Däremot kan uttrycket bli hur litet som helst (minsta värde saknas alltså)!

Kvadratroten

Definition. Om $a\geq 0$ så definierar vi $\sqrt{a}$ som det tal x så att

$$x=\sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2=a, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Det följer från definitionen att $\sqrt{a}\geq 0$ för alla $a\geq 0$.

Kvadratrötter och negativa tal?

- Inga negativa tal! Saker som $\sqrt{-4}$ är nonsens och inte något vi någonsin kommer att använda i denna kurs. Möjliga tolkningar i form av komplexa tal hanteras på annat sätt. Det finns kurser i komplex analys där detta problem studeras och problemet överlämnas dit.

- Vi får aldrig(!) något negativt från kvadratroten heller. Till exempel så är $\sqrt{9}=3$. Aldrig ± 3 eller något annat vansinne. Tecken före kvadratroten kommer alltid från något annat. Ofta handlar det då om en ekvation vi försöker lösa. Till exempel $x^2=9$, som har lösningarna $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. Tecknet här kommer alltså från ekvationen, inte kvadratroten!

Exempel

Lös $x - 1 = \sqrt{2x+1}$.

Alternativ 1. Vi räknar med implikationer och kan därmed kvadrera lite hur vi vill. Priset vi betalar för detta är att alla eventuella lösningar vi finner **måste** kontrolleras. Utan kontroll har vi inte visat något (och därmed riskerar vi noll poäng på den uppgiften på en tenta). Alltså,

$$x - 1 = \sqrt{2x+1} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

Nu måste vi testa och ser då att om $x = 0$ så skulle

$$0 - 1 = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1,$$

vilket inte går då $-1 \neq 1$. Om $x = 4$ är VL $= 4 - 1 = 3$ och HL $= \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$. Detta är alltså en lösning!
Svar: Endast $x = 4$ löser ekvationen.

Alternativ 2. Detta är lite bökigare. Två problem:

1. Vi måste ha $2x + 1 \geq 0$, eller $x \geq -1/2$, för att kvadratroten skall vara definierad. Detta krav är dock mindre problematiskt (på grund av att om vi hittar en lösning som uppfyller nedanstående krav så kommer uttrycket i kvadratroten att bli icke-negativt) än nästa krav.

2. Vänsterledet måste vara icke-negativt: $x - 1 \geq 0$, eller $x \geq 1$, eftersom vi vet att kvadratroten alltid är icke-negativ.

Dessa villkor ger att $x \geq 1$ (varför bara den?). Med detta villkor kan vi faktiskt räkna med ekvivalenser i varje steg (undersök detta!). Detta villkor visar även att den falska lösningen $x = 0$ ska tas bort.

Det är **inte** så att det alltid kommer förekomma en ”falsk” lösning och en som stämmer!

Exempel

Lös ekvationen $\sqrt{2x^2 - \frac{15}{2}x + 2} = 1 - 2x$.

Lösning. Åtminstone två alternativ finns. Vi kan reda ut ordentligt precis vilka intervall som är möjliga att finna lösningar i för att därmed kunna räkna med ekvivalenser. Eller så är vi lite slarvigare och använder implikationer i stället, då till priset att alla funna lösningar **måste** testas i **ursprungsekvationen**. Vi använder alternativ 2 och finner att

$$\sqrt{2x^2 - \frac{15}{2}x + 2} = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - \frac{15}{2}x + 2 = (1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-7 \pm 9}{8}.$$

Om $x = \dfrac{1}{4}$ blir

$$\begin{aligned} \text{V.L.} &= \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{15}{8} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \\ \text{H.L.} &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vänsterled och högerled stämmer överens, så detta är en lösning. Om $x = -2$ blir

$$\begin{aligned} \text{V.L.} &= \sqrt{8 + 15 + 2} = \sqrt{25} = 5, \\ \text{H.L.} &= 1 - 2(-2) = 5. \end{aligned}$$

Alltså är även $x = -2$ en lösning.

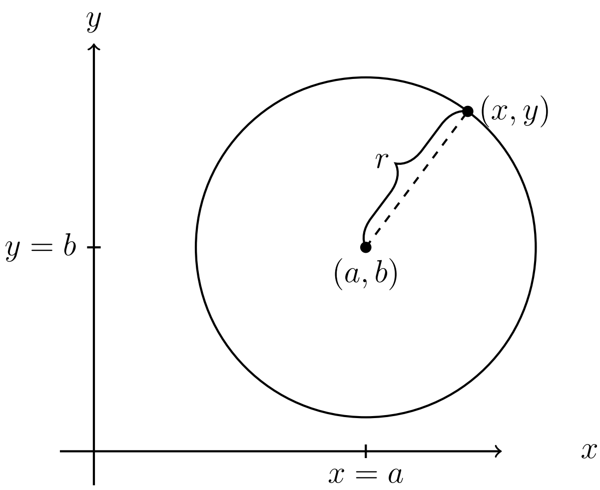
Svar: $x = -2$ eller $x = \dfrac{1}{4}$.

1.3 Cirklar

Låt $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ vara en punkt i planet. Avståndet r från en annan punkt (x, y) till (a, b) ges som bekant av

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

enligt Pythagoras sats. Om vi ritar ut alla punkter (x, y) som har samma avstånd r till punkten (a, b) erhåller vi en cirkel.



Med kravet att $r \geq 0$ kan vi kvadrera ekvationen ovan med ekvivalens (uttrycket inne i roten är aldrig negativt) och erhåller då cirkelns ekvation:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Cirkeln har radien r (ingen kvadrat) och centrum i punkten (a, b).

Exempel

Undersök om ekvationen $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ beskriver en cirkel, och bestäm i så fall dess radie och centrum.

Lösning. Tekniken är att kvadratkomplettera x-termer och y-termer var och en för sig och analysera resultatet:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Alltså är detta mycket riktigt en cirkel. Centrum ligger i $(-1,\ 2)$ (observera tecknen och ordningen) och radien är $\sqrt{5}$ (observera att det är r^2 som är konstanten i högerledet).
Svar: Ja, det är en cirkel med centrum i $(-1,\ 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

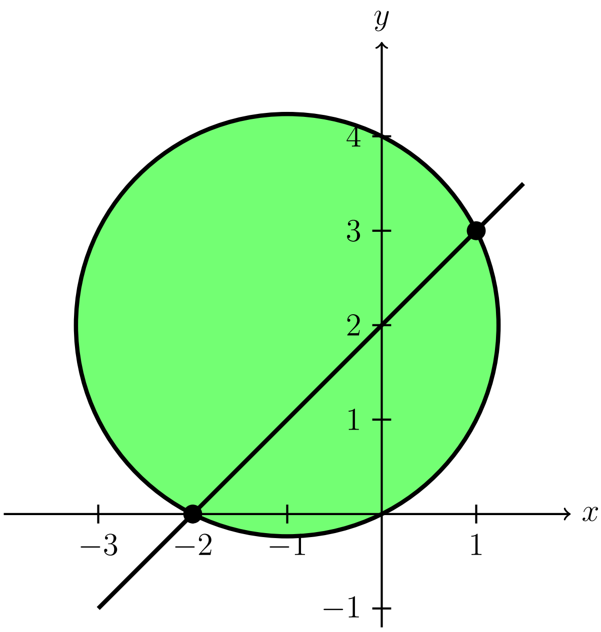
Exempel

Undersök var linjen $y = 2 + x$ skär cirkeln med centrum i $(-1,\ 2)$ och radie $\sqrt{5}$.

Lösning. Linjen skär cirkeln precis där linjens ekvation och cirkelns ekvation gäller samtidigt, så

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5, \\ y = 2 + x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0, \\ y = 2 + x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0, \\ y = 2 + x. \end{cases}$$

Om $x = 1$ blir $y = 3$ och om $x = -2$ blir $y = 0$.
Svar: $(1,\ 3)$ och $(-2,\ 0)$.



1.4 Polynom

Låt oss börja med att formellt definiera vad vi menar med ett polynom.

Polynom

Definition. Ett polynom $p(x)$ är ett uttryck av typen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.

Exempel

- Exempel på polynom är x^2, 7, $1 + x + x^5$, $x^6 + 4x^3$, etc.
- Exempel på uttryck som **inte** är polynom: $x^{1/2}$, $\sin x$, x^{-3} etc.

Ofta när vi arbetar med polynom så är vi intresserade av vilka nollställen polynomet här. Detta eftersom det oftast är ett delsteg i att *faktorisera* polynom. Låt oss definiera några termer till.

Vanliga benämningar

Definition. Ett polynom $p(x)$ säges ha ett **nollställe** när $x = a$ om $p(a) = 0$. Speciellt för polynom kallas nollställen ofta för **rötter**. Ett polynom har alltså en rot $x = a$ om $x = a$ är ett nollställe. Vidare kallas konstanterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ för polynomets **koefficienter**.

Exempel

Lös ekvationen $x^3 = x$.

Lösning. Vi skulle kunna gissa fram lösningar. Till exempel $x = 1$ verkar fungera. Sen kan vi dessutom ganska direkt se att $x = -1$ löser ekvationen då $(-1)^3 = -1$. Är detta alla lösningar? Nej, lite mer analys visar att även $x = 0$ löser ekvationen. Hur vet vi då när vi är färdiga? Låt oss omformulera frågan:

$$\begin{aligned} x^3 = x \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0. \end{aligned}$$

Alltså är mycket riktigt $x = 0$ och $x = \pm 1$ de enda lösningarna. Det sista vänsterledet kallas för *faktoriseringen* av $x^3 - x$.

1.4.1 Polynomdivision

Fungerar i princip som för heltal. Tanken är att reducera graden på täljaren så den är mindre än graden för nämnaren.

Exempel

Förenkla $\dfrac{x^3-4x+1}{x-3}$.

Lösning. Vi ställer upp, till exempel, enligt följande.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +3x & +5 \\ \cline{2-5}
x-3\big) & x^3 & & -4x & +1 \\
 & -x^3 & +3x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & -4x & \\
 & & -3x^2 & +9x & \\ \cline{3-4}
 & & & 5x & +1 \\
 & & & -5x & +15 \\ \cline{4-5}
 & & & & 16
\end{array}
$$

Proceduren fortsätter till dess att vi får kvar något som har lägre gradtal än nämnaren. I detta fall gick det inte jämnt upp utan vi fick en så kallad *rest*. Vad vi kan utläsa ur detta är att

$$\frac{x^3-4x+1}{x-3}=x^2+3x+5+\frac{16}{x-3}.$$

Kontrollera att detta stämmer genom att skriva allt på samma nämnare! Ta för vana att göra detta efter varje polynomdivision. Det är lätt att få teckenfel!
Hade resten varit noll hade det inneburit att $x=3$ hade varit ett nollställe till täljaren. Allmänt gäller att

$$p(x)=(x-a)q(x)+r,$$

där $p(x)$ har grad n, $q(x)$ har grad $n-1$, och r är en konstant (resten). Vi ser från denna representation att

$$p(a)=0 \quad\Leftrightarrow\quad r=0.$$

Det vill säga, $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$ (så $p(a)=0$) om och endast om polynomdivisionen med $x-a$ går jämt upp (resten blir noll; $r=0$). Detta är i princip det faktorssatsen säger.

Faktorssatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(x)$ innehåller faktorn $x-a$, det vill säga $p(x)=(x-a)q(x)$ för något polynom $q(x)$.

(ii) $x=a$ är ett nollställe till $p(x)$, det vill säga att $p(a)=0$.

Vi betraktar ett par exempel.

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x)=6x^3-7x^2+1$.

Lösning. Proceduren vi använder är följande. Först gissar vi en rot. Lämpligtvis testar vi heltal då uppgifterna som ges brukar vara konstruerade på det sättet. I ett allmänt fall får man helt enkelt låta en dator gissa. *Men*, det finns en teknik för att gissa systematiskt om man har heltalskoefficienter i polynomet; se slutet på föreläsning 3. Vi testar $x = 0$, vilket inte fungerar (vi har en konstantterm så då kan $x = 0$ aldrig vara ett nollställe). Vi testar $x = 1$ och ser att detta är ett nollställe.

Nästa steg är polynomdivision där vi delar bort den kända faktorn $x - 1$ (som motsvarar nollstället $x = 1$).

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 6x^2 & -\,x & -\,1 \\ \cline{2-5}
x-1 \big) & 6x^3 & -\,7x^2 & & +\,1 \\
 & -\,6x^3 & +\,6x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,x^2 & & \\
 & & x^2 & -\,x & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,x & +\,1 \\
 & & & x & -\,1 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Det gick jämt upp så $x = 1$ måste vara ett nollställe. Nu vet vi alltså att

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x-1)(6x^2 - x - 1) + 0 = 6(x-1)\left(\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{6}\right) \\
&= 6(x-1)\left(\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2\right) = 6(x-1)\left(x - \frac{1}{12} - \frac{5}{12}\right)\left(x - \frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right) \\
&= 6(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-1)\,(2x-1)\,(3x+1)\,,
\end{aligned}
$$

där vi har kvadratkompletterat den sista parentesen och använt konjugatregeln.

Svar: $p(x) = (x - 1)(2x - 1)(3x + 1)$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8x + 14$.

Lösning. Proceduren vi använder är följande. Först gissar vi en rot. Lämpligtvis testar vi heltal då uppgifterna som ges brukar vara konstruerade på det sättet. I ett allmänt fall får man helt enkelt låta en dator gissa. *Men*, det finns en teknik för att gissa systematiskt om man har heltalskoefficienter i polynomet; se slutet på föreläsning 3. Vi testar $x = 0$, vilket inte fungerar (vi har en konstantterm så då kan $x = 0$ aldrig vara ett nollställe). Vi testar $x = \pm 1$ och ser att $x = -1$ faktiskt är ett nollställe.

Nästa steg är polynomdivision där vi delar bort den kända faktorn $x + 1$ (som motsvarar nollstället $x = -1$).

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -6x & +14 & \\
\cline{2-5}
x+1 & 2x^3 - 4x^2 & +8x & +14 & \\
 & -2x^3 - 2x^2 & & & \\
\cline{2-2}
 & -6x^2 & +8x & & \\
 & 6x^2 & +6x & & \\
\cline{2-3}
 & & 14x & +14 & \\
 & & -14x & -14 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Det gick jämt upp så $x = -1$ måste vara ett nollställe. Nu vet vi alltså att

$$p(x) = (x+1)(2x^2 - 6x + 14) + 0 = 2(x+1)((x-3)^2 + 5),$$

där vi har kvadratkompletterat den sista parentesen. Är vi klara? Ja, det är vi faktiskt (om vi inte ska blanda in komplexa faktorer, vilket vi återkommer till senare). Anledningen till kvadratkompletteringen är att vi nu enkelt kan se att $(x-3)^2 + 5 \geq 5$ för alla x. Denna faktor blir alltså aldrig noll!
Svar: $p(x) = 2(x+1)((x-3)^2 + 5)$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

> **Exempel**
>
> Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Lösning. Samma teknik som ovan. Vi gissar och finner att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -2x & +1 & \\
\cline{2-5}
x-1 & x^3 - 3x^2 & +3x & -1 & \\
 & -x^3 + x^2 & & & \\
\cline{2-2}
 & -2x^2 & +3x & & \\
 & 2x^2 & -2x & & \\
\cline{2-3}
 & & x & -1 & \\
 & & -x & +1 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Alltså måste $p(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 1)$. Den sista faktorn är ett andragradsuttryck och det kan vi faktorisera med kvadratkomplettering: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Alltså är $p(x) = (x-1)^3$.
Svar: $p(x) = (x-1)^3$. Kontrollera genom att multiplicera ihop!

Kapitel 2

Absolutbelopp, olikheter och summor

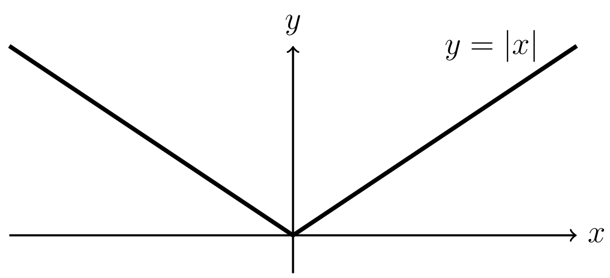
2.1 Absolutbelopp

Absolutbelopp

Definition. För varje reellt x definieras **absolutbeloppet** $|x|$ enligt

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Exempelvis har vi $|3| = 3$ och $|-4| = 4$. Beloppet tar alltså bort tecknet! Det är alltså en direkt konsekvens av definitionen att $|x| \geq 0$ för alla x. Dessutom kan vi uttrycka $\sqrt{x^2} = |x|$ (visa det!). Man kan så klart skissa hur beloppsfunktionen ser ut.



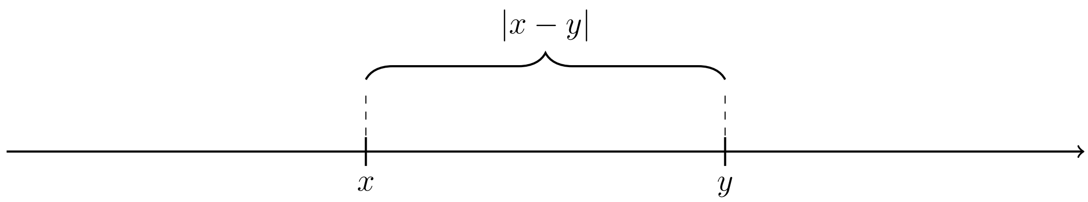
Strikt olikhet?

Observera att vi lika gärna hade kunnat definiera $|x|$ som x då $x \geq 0$ och $-x$ då $x < 0$, eller till och med x då $x > 0$ och $-x$ då $x \leq 0$. Båda dessa definitioner skulle se lite mer ordentliga ut eftersom vi inte har med fallet $x = 0$ två gånger, men eftersom $|0| = 0$ i alla tre fallen så orsakar inte vår definition ovan någon logisk kullerbytta. Man kan tycka att det kanske ser lite fult ut att definiera samma fall två gånger, men vi tillåter oss detta för att inte riskera att glömma bort något fall.

Ur definitionen följer det också att

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ y - x, & x \leq y. \end{cases}$$

Vi kan alltså tolka $|x - y|$ som avståndet (alltid icke-negativt) mellan punkterna x och y på den reella axeln. Ett specialfallet ges av $|x - 0| = |x|$ som alltså är avståndet från x till origo.



Likheter och olikheter

Om $d \geq 0$ är en konstant så gäller följande.

$$
\begin{aligned}
|x| = d &\quad \Leftrightarrow \quad x = \pm d \\
|x| \leq d &\quad \Leftrightarrow \quad -d \leq |x| \leq d \\
|x| \geq d &\quad \Leftrightarrow \quad x \leq -d \text{ eller } x \geq d
\end{aligned}
$$

Hur löser vi då ekvationer och olikheter som innehåller absolutbelopp? Typiskt är att vi delar upp i olika fall, tillräckligt många för att vi ska kunna skriva uttrycken utan belopp i varje fall.

Exempel

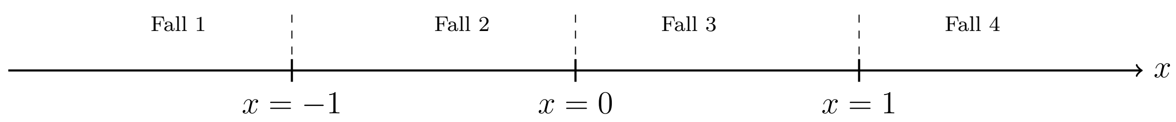
Lös $|x| = 2|x-1| - |x+1|$.

Lösning. Vi börjar med att skriva ut hur beloppen definieras:

$$
|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0, \\ -(x+1), & x+1 \leq 0, \end{cases} \quad \text{och} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0, \end{cases}
$$

$$
\text{samt} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & x-1 \leq 0, \end{cases}
$$

Låt oss betrakta den reella tallinjen.



Intressanta punkter där beloppen kan växla tecken: $x = -1$ (då $x + 1$ växlar tecken), $x = 0$ (då x växlar tecken), och $x = 1$ då ($x - 1$ växlar tecken). Vi måste alltså dela upp i fyra olika fall.

Fall 1, $x < -1$:

$$
|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3.
$$

Går inte. Det finns ingen lösning i detta intervall.

Fall 2, $-1 \leq x \leq 0$:

$$
|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.
$$

Eftersom $\dfrac{1}{2} \notin [-1, 0]$ så är detta ingen lösning.
Fall 3, $0 \leq x \leq 1$:

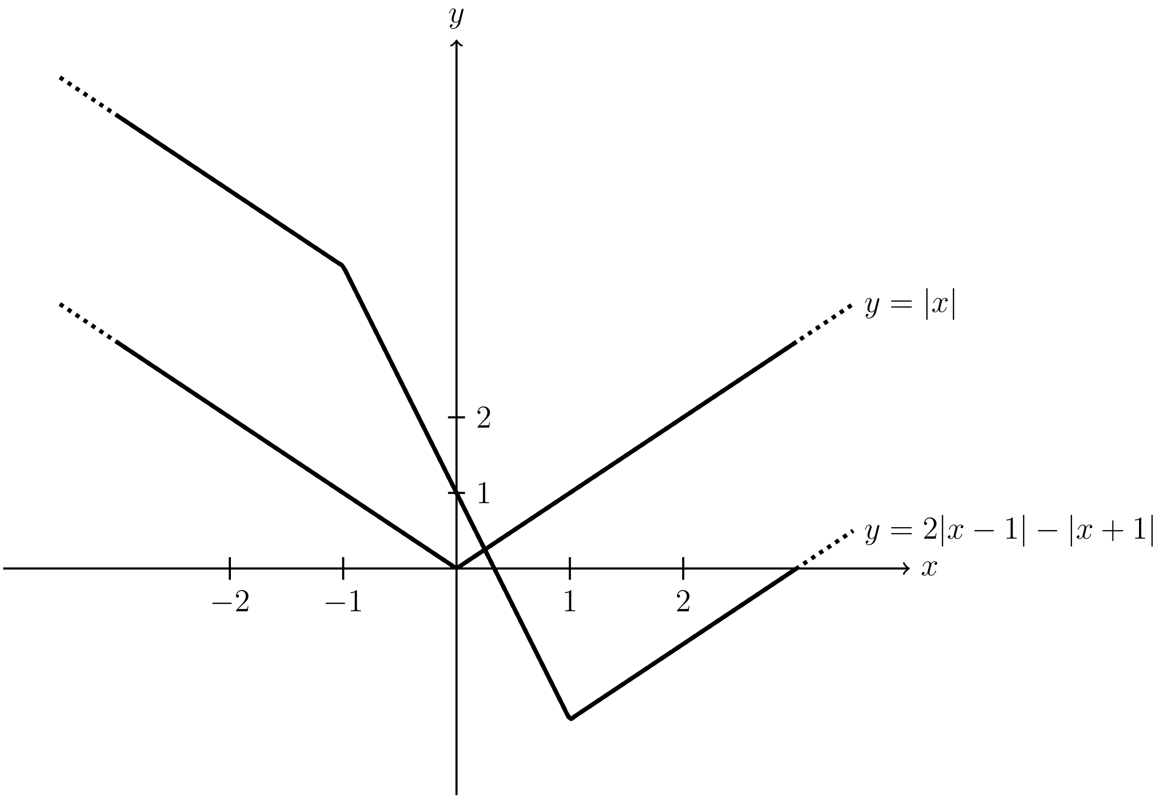
$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom $\dfrac{1}{4} \in [0, 1]$ så är detta en lösning.
Fall 4, $x \geq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = 2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3.$$

Går inte. Det finns ingen lösning i detta intervall.

Figuren nedan visar hur situationen ser ut grafiskt. Detta gör vi enklast genom att undersöka hur uttrycken ser ut i vart och ett av de fyra fallen.



Vi ser att uttrycken skär varandra i en enda punkt, som verkar ligga vid $x = 1/4$. Vi ser även ovan att det ofta blir ”hörn” i brytpunkterna. Detta är normalt. Vad som inte ska ske är att det blir hopp. Detta eftersom beloppsfunktionen är kontinuerlig — ett begrepp vi återkommer till i en senare kurs. Kan du se i figuren varför $x = 1/2$ dyker upp som ett förslag på lösning?
Svar: $x = \dfrac{1}{4}$ är den enda lösningen.

2.2 Olikheter

Att lösa olikheter skiljer sig en del från att lösa likheter. I allmänhet brukar det vara svårare, och ett problem är att man måste vara försiktig med att förkorta bort saker. Vi betraktar ett exempel för att belysa hur vi angriper problemet.

Exempel

Lös olikheten $\dfrac{4}{x+1} \leq x-2$.

Lösning. Tekniken vi rekommenderar är att flytta allt till ena sidan av olikheten, föra upp allt på gemensam nämnare, faktorisera, göra en teckentabell, och sist men inte minst kontrollera rimligheten. Således,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+1} \leq x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x+1} - (x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4-(x^2-x-2)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x+6}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-(x+2)(x-3)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0.
\end{aligned}$$

Observera tecknet i sista steget! Vi gör en teckentabell för det sista vänsterledet.

		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$. Observera vart det blev strikt olikhet (varför?)!

Kontroll. Här kan vi till exempel plocka punkter i de olika intervallen som finns och se till att vårt påstående stämmer överens med det vi utgick från.

$$\begin{aligned}
x = -3: &\qquad \frac{4}{-3+1} = -2 > -5 \\
x = -\frac{3}{2}: &\qquad \frac{4}{-3/2+1} = -8 \leq -3/2-2 = -7/2 \\
x = 0: &\qquad \frac{4}{0+1} = 4 > 0-2 = -2 \\
x = 4: &\qquad \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} < 4-2 = 2
\end{aligned}$$

Observera att denna kontroll inte *bevisar* att vi har gjort rätt (det kan fortfarande vara allvarliga fel vid faktorisering och identifiering av nollställen etc), men den visar ändå att svaret inte är orimligt. Ett vanligt fel på tentor och duggor är att man av någon anledning svarar med komplementintervallen. Detta ger alltid noll poäng oavsett anledning. Genom kontroll av typen ovan kan man enkelt undvika att svara med komplementintervallen.

Svar. $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$.

Olikheter och multiplikation

Se upp med att multiplicera olikheter med uttryck som kan skifta tecken! Till exempel kan det vara lockande att förlänga olikheten i föregående exempel med $x+1$. Då skulle vi i så fall kunna undersöka

$$4 \leq (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq 0.$$

Vi ser att nämnaren $x+1$ har försvunnit i jämförelse med ovan, och därmed kommer vår nya teckentabell att sakna den informationen. Punkten $x=-1$ är inte längre intressant och resten av tecknen riskerar att bli fel. Detta är så klart helt åt skogen. Den enda räddningen är att betrakta två fall: $x+1 \geq 0$ och $x+1 < 0$ och reda ut ett i taget. Detta skulle fungera, men i allmänhet brukar sådana lösningar innehålla andra fel så det brukar ofta bli noll poäng på en tenta ändå. Undvik alltså denna teknik!
Ännu enklare, visst är $2 < 4$? Alltså måste $2 \cdot 2 < 2 \cdot 4$, eller $4 < 8$. Inget konstigt här, det gick bra att multiplicera olikheten med 2. Men vad händer om vi multiplicerar med -2? Då skulle $-2 \cdot 2 < -2 \cdot 4$, eller $-4 < -8$. Detta stämmer så klart inte!

2.3 Summor

Vi ska nu diskutera ett bekvämt sätt att skriva summor på, speciellt i de fall då termerna som summeras har någon form av upprepande mönster.

En summa S brukar skrivas

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Symbolen $\sum$ betyder att vi ska summera termerna a_k då **summationsindexet** k startar i $k=1$, sen ökar k ett steg i taget till dess att $k=n$ och vi har då summerat n stycken termer.

Det är inget speciellt att börja med $k=1$, summor kan starta i vilken punkt som helst (det blir olika värden på summan så klart).

Exempel

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = (2^2+2) + (3^2+3) + (4^2+4) = 38.$$

Observera att det inte förekommer något k i svaret! Summationsindexet (bokstaven vi använder för att beskriva hur termerna i summan varierar) försvinner **alltid**. Att vi använde bokstaven k är inte heller något speciellt. Faktiskt så är

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = \sum_{j=2}^{4}(j^2+j).$$

Summor kan delas upp (de är ju summor!) och gemensamma faktorer i alla termer kan brytas ut. Alltså,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

där c är en konstant.
Däremot kan inte summor multipliceras enkelt (eller delas upp om det är en summa av produkter). Vad skulle till exempel gälla

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) =? \qquad \text{eller} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k =?$$

Antal termer i summan

Hur många termer innehåller summan $\sum_{k=-2}^{5}(2k+1)$? Vi börjar på $k=-2$ och slutar på $k=5$. Alltså kommer k att anta värdena

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5,$$

vilket är 8 stycken. Vi kan räkna ut detta genom $5-(-2)+1$. Ofta missar man $+1$, så var försiktiga!

2.3.1 Aritmetiska summor

Aritmetisk summa

Definition. En summa där det är konstant skillnad mellan påföljande termer kallas *aritmetisk*.

I en aritmetisk summa gäller alltså att

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots$$

är en konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1+3+5+7+9$.

Detta kan vi direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar en generell teknik. Genom att summera två stycken likadana summor (och skriva det kreativt genom att reversera ordning på den ena) uppstår följande mönster:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 \\ S & = & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $2S = 5 \cdot 10$ eller att $S = 25$. Generellt gäller för en **aritmetisk summa** alltid att

$$S = \frac{\text{första termen } + \text{ sista termen}}{2} \cdot \text{antal termer}.$$

2.3.2 Geometriska summor

Geometrisk summa

Definition. En summa där det är en konstant kvot mellan påföljande termer kallas *geometrisk*.

Detta innebär alltså att

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

är konstant och att summan nödvändigtvis har formen

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

om S har $n+1$ termer (notera antalet!) och a är första termen.

Exempel

Beräkna summan $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16$.

Detta kan vi återigen direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar åter igen en generell teknik. Om vi multiplicerar summan med kvoten $q = -2$ och drar bort detta från ursprungssumman uppstår följande mönster.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & & \\ -2S & = & & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & - & 32 \\ \hline S-(-2S) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 32 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $3S = 33$ eller att $S = 11$. Generellt gäller för en **geometrisk summa** att

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ a(n+1), & q = 1. \end{cases}$$

Observera här att

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

så båda varianterna ger samma svar.

2.3.3 Andra sorters summor?

Aritmetisk eller geometrisk?

Observera att de allra flesta summor varken är aritmetiska eller geometriska! Det är alltså inte fifty-fifty att chansa på tentan och hoppas på det bästa. Till exempel $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2$ är varken eller, men kan enkelt räknas ut ändå eftersom det bara är fyra termer.

Men om en summa innehåller för många termer för att beräknas för hand då? Vissa fall kan man ändå hantera, till exempel följande halvluriga variant (gammal tentauppgift!).

Exempel

Beräkna summan $\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k)$.

Lösning. Summan består av en aritmetisk del och en geometrisk del (kontrollera!). Vi delar således upp summan i två delar och beräknar enligt standardformler:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k) &= \sum_{k=3}^{27}3k+\sum_{k=3}^{27}3^k = \frac{3\cdot 3+3\cdot 27}{2}(27-3+1)+3^3\sum_{k=0}^{24}3^k \\ &= 1125+3^3\frac{3^{25}-1}{3-1} = 1125+\frac{27}{2}(3^{25}-1).\end{aligned}$$

Svar: $1125+\frac{27}{2}(3^{25}-1)$.

Kapitel 3

Komplexa tal

3.1 Komplexa tal

Vi ska nu introducera de komplexa talen. En variant är att göra det lite handviftande genom följande definition och sen bara hävda att vanlig algebra fungerar. På många sätt duger det för att vi ska kunna räkna, men vi ska göra det hela lite mer noggrant strax.

Definition. Det imaginära talet i uppfyller att $i^2 = -1$.

Detta är alltså ett tal vars kvadrat är negativ. Det kan således aldrig vara ett reellt tal utan är ett helt nytt slags objekt. Märk väl att vi inte någonstans skriver att "$\sqrt{-1} = i$". Detta av den enkla anledningen att vi endast definierat $\sqrt{x}$ för $x \geq 0$. Ett alternativ vore givetvis att utvidga definitionen av kvadratroten till att inkludera negativ tal (du kan säkert se den utvidgningen framför dig), men det objekt du då erhåller är inte den kvadratrot vi introducerat tidigare. Exempelvis så är det inte längre säkert att $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (fundera över vad som händer om både a och b är negativa). Du *kommer* att få poängavdrag i denna kurs om du skriver kvadratroten ur något negativt.
Mer ordentligt så gör vi följande definition.

Definition. Den komplexa talkroppen $\mathbf{C}$ består av alla talpar $z = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ så att om $z_1 = (a_1, b_1)$ och $z_2 = (a_2, b_2)$ definieras addition enligt

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

och multiplikation enligt

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

Vi låter $i = (0, 1)$ och säger att $z_1 = z_2$ om och endast om $a_1 = a_2$ och $b_1 = b_2$.

Notera att det följer från denna definition att

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1,$$

om vi tolkar tal på formen $(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$, som det reella talet a. Vi kan även visa både addition och multiplikation är kommutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{och} \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

associativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \text{och} \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

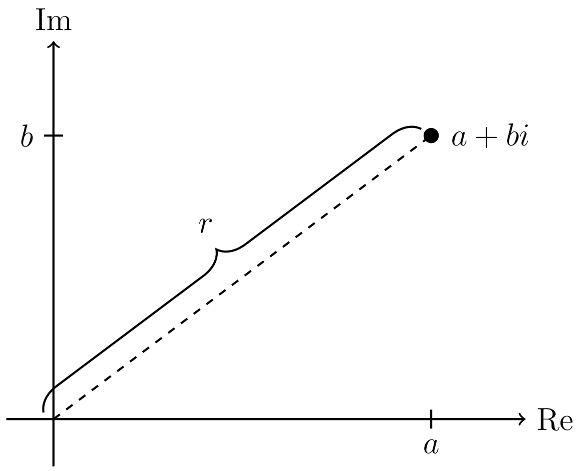
samt distributiva

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Det lämnas som övning till läsaren att visa detta.
Vi inför nu (den lite enklare) beteckningen $z = a + bi$, där vi då menar

$$z = a(1,0) + b(0,1)$$

och där a och b är reella tal ($a, b \in \mathbf{R}$). Ett komplext tal har alltså två dimensioner: en reell koordinat a (kallas realdelen) och en *imaginär* koordinat b (kallas imaginärdelen). Vi kan representera det komplexa talplanet som ett två-dimensionellt plan med en real-axel och en imaginär-axel. Vi kan representera komplexa tal i det komplexa talplanet med figurer av denna typ.



Avståndet $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ har en naturlig tolkning och används som definition av det komplexa absolutbeloppet; vi återkommer till detta.

Komplexa tal uppfyller samma ”regler” som reella tal gör (addition, multiplikation etc) med den extra förutsättningen att $i^2 = -1$.

När vi ska räkna med komplexa tal gör vi alltså som vanligt, men vi kan hela tiden förenkla uttryck som innehåller i^2. Visst går det att gå tillbaka till den förra definitionen men det finns ingen anledning till det.

Exempel

$$(2 - i)(1 + 4i) = 2 + 8i - i - 4i^2 = 2 + 7i + 4 = 6 + 7i.$$

Komplexa tal är en användbar konstruktion. I denna kurs och efterföljande analyskurs kommer vi att:

(i) Faktorisera polynom fullständigt i (komplexa) faktorer av grad 1.

(ii) Göra trigonometriska omskrivningar och förenklingar.

(iii) Beräkna integraler.

(iv) Lösa differentialekvationer.

Tillämpningar finns inom vitt skilda områden som exempelvis elkretsteori, reglerteknik, transformer, elektromagnetism etc.

Definition. Låt $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$. Då definierar vi följande begrepp:

(i) **Realdelen** $\operatorname{Re} z = a$;

(ii) **Imaginärdelen** $\operatorname{Im} z = b$ (observera att det inte är något i i imaginärdelen utan endast koefficienten före i i z);

(iii) **Absolutbeloppet** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(iv) **Konjugatet** $\overline{z} = a - bi$ (vi har bytt tecken på imaginärdelen).

Absolutbelopp

Observera att absolutbeloppet vi definierat ovan täcker en större klass tal än det vi såg på förra föreläsningen. Om $z = a+bi$ är reell så är $b = 0$, och då kan vi beräkna att $|z| = \sqrt{a^2 + 0}$. Vi vet enligt tidigare att $\sqrt{a^2} = |a|$, där detta belopp är det vi introducerade på föreläsning två. Den nya definitionen reduceras alltså till den gamla om vi endast betraktar reella tal.

En kuggfråga som blir fel ibland.

Komplext eller reellt belopp?

Bestäm $|3 - 4|$.

Felet som kan inträffa är att man slarvigt tänker sig att $3 - 4$ är ett komplext tal och bildar $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Detta är så klart helt galet; vi ser direkt att $3 - 4 = -1$, så $|3 - 4| = |-1| = 1$.

3.1.1 Komplexa identiteter

Till exempel kan vi bevisa identiteten $|z|^2 = z\overline{z}$ genom att låta $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$, och se att

$$\mathrm{VL} = |z|^2 = |a + bi|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

samt

$$\mathrm{HL} = z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$$

så vänster- och högerled stämmer överens för alla $z \in \mathbf{C}$. Vi kan visa följande egenskaper på samma sätt (gör det som en övning!).

Direkta följder av definitionerna ovan inkluderar

(i) $|z|^2 = z\overline{z}$;

(ii) $|zw| = |z||w|$;

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

(iv) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Vad menar vi då med att två komplexa tal är lika (som potentiellt händer i punkt (iii) ovan)? Definitionen är ganska naturlig.

Likhet

Definition. Talen $z = a + bi$ och $w = c + di$ är lika om och endast om de har samma real- och imaginärdelar, dvs att

$$a = c \qquad \text{och} \qquad b = d.$$

Vi skriver då att $z = w$.

Vi använder oss av denna definition när vi löser ekvationer som involverar komplexa tal.

Exempel

Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $3z - 2i\overline{z} - 5 + 10i = 0$.

Lösning. En variant för att lösa ekvationer som innehåller komplexa variabler är att ansätta att $z = a + bi$ och utnyttja definitionen ovan genom att undersöka realdelen och imaginärdelen för ekvationen som ett system av ekvationer med två obekanta. Denna metod är inte alltid den bästa. Det kan bli brutalt hemska kalkyler (om vi till exempel skulle ha $z^7 + \cdots$ eller dylikt), så finns det en annan metod brukar det vara den det är meningen att använda. Men i fall som denna ekvation blir det faktiskt enklast. Sålunda, låt $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned} 3(a+bi) - 2i\overline{(a+bi)} - 5 + 10i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a + 3bi - 2ai - 2i(-bi) - 5 + 10i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a - 2b + i(3b - 2a) = 5 - 10i. \end{aligned}$$

Vi undersöker nu realdel och imaginärdel separat:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ -2a + 3b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Alltså ges den enda lösningen av $z = -1 - 4i$. Kontrollera detta!
Svar: $z = -1 - 4i$.

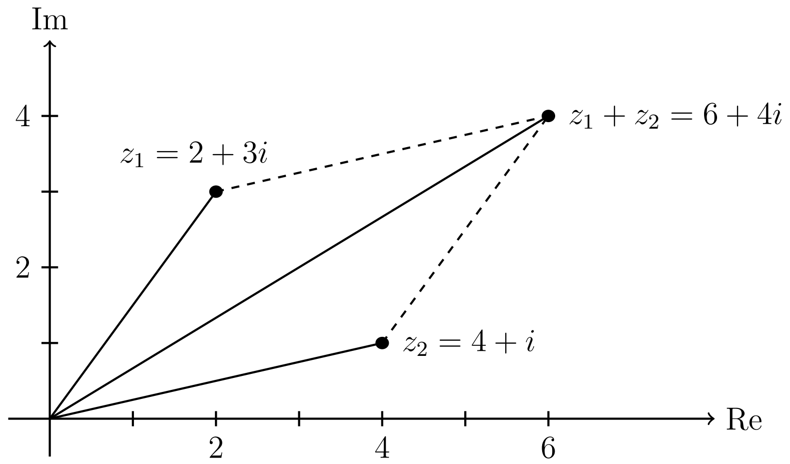
Definition. Om $z, w \in \mathbf{C}$ och $w \neq 0$ så definierar vi $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$.

Exempel

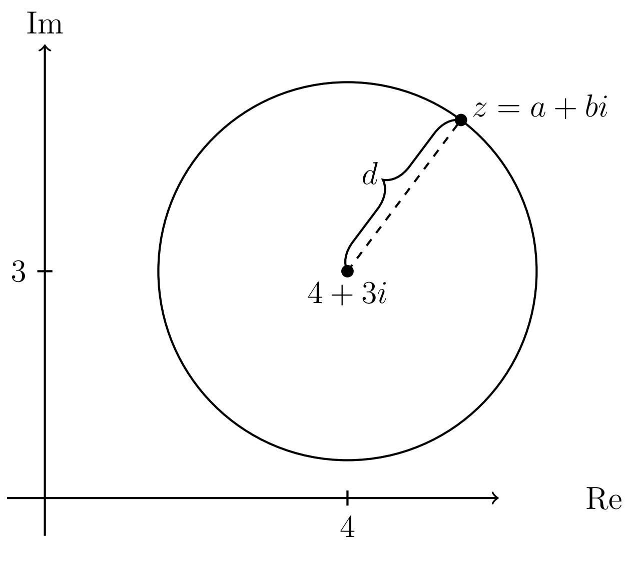
$$\frac{3-i}{2+3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{3-11i}{4+9} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i.$$

3.1.2 Geometriska tolkningar

Eftersom komplexa tal kan representeras som punkter i ett plan så kan vi ibland tolka operationer, olikheter och ekvationer geometriskt. Till att börja med kan addition av komplexa tal göras som vektoraddition.



Om $z, z_0 \in \mathbf{C}$ så kommer till exempel samband av typen $|z - z_0| = d$ och $|z - z_0| \leq d$ att representera en cirkel respektive en ifylld disk.



Hur kan vi se detta? Vi kan ansätta att $z = a + bi$ och $z_0 = a_0 + b_0 i$ där $a, b, a_0, b_0 \in \mathbf{R}$ och se vilken form uttrycken tar. Till exempel:

$$d^2 = |z - z_0|^2 = |a + bi - a_0 - b_0 i|^2 = |(a - a_0) + (b - b_0)i|^2 = (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2,$$

något vi känner igen som cirkelns ekvation!

3.1.3 Triangelolikheten

En mycket användbar olikhet (så användbar att man ofta kräver att mer abstrakta rum ska ha denna egenskap) är triangelolikheten.

Triangelolikheten

Om $z, w \in \mathbf{C}$ så gäller att $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Geometriskt är detta ganska klart. Uttrycken $|z|$ och $|w|$ kan tolkas som katetlängderna i en triangel där längden på hypotenusan ges av $|z + w|$. Försök rita en triangel där hypotenusan är längre än summan av kateternas längder! Det går även att visa rent algebraiskt. Tanken bygger på att visa $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$. Utveckla vänsterledet som $(z+w)\overline{(z+w)}$ och utnyttja att $\mathrm{Re}(zw) \leq |zw|$ (varför är detta sant?).

Exempel

Antag att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Visa att z ligger i en disk med centrum i punkten -4 och radie 12.

Vi börjar med att formulera det hela med belopp. Vi vet att $|z - 3i| \leq 7$ då detta är precis den olikhet som beskriver att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Sen vill vi undersöka $|z - (-4)|$:

$$|z + 4| = |(z - 3i) + (3i + 4)| \leq |z - 3i| + |3i + 4| \leq 7 + |3i + 4| = 7 + \sqrt{9 + 16} = 12.$$

Här har vi kreativt lagt till noll i form av $-3i + 3i$ för att på så sätt skapa $z - 3i$, som vi sedan kan uppskatta.

3.2 Polynomekvationer

Polynom

Definition. Ett polynom $p(z)$ är ett uttryck av typen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är (möjligen komplexa) konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad n*.

Det är en liten skillnad i jämförelse med föreläsning 1: vi har ersatt variabeln x med variabeln z och tänker oss nu att konstanter i allmänhet är komplexa. Anledning att använda variabeln z är för att markera att vi kommer att arbeta med komplexa tal.

3.2.1 Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Exempel

Finn alla (reella och komplexa) lösningar till ekvationen $z^2 + 2(1 + i)z - 3 - 2i = 0$.

Lösning. Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = (z + 1 + i)^2 - (1 + i)^2 - 3 - 2i = (z + 1 + i)^2 - 3 - 4i = 0.$$

Låt $w = z + 1 + i$ och skriv $w = a + bi$ där a, $b \in \mathbf{R}$. Vi löser

$$w^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Alternativ 1. Vi söker w så att $w^2 = 3 + 4i$. Detta innebär då att $|w^2| = |3 + 4i| = \sqrt{25} = 5$. Nu vet vi att $w = a + bi$ är ett komplext tal, så $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$. Dessa två samband visar alltså att $a^2 + b^2 = 5$. Det följer då att $2a^2 = 8$, eller att $a = \pm 2$.
Alternativ 2. Vi ser att a, $b \neq 0$ och att $b = 2/a$. Då måste $a^2 - (2/a)^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; a^4 - 4 = 3a^2$ gälla (ekvivalens ty $a \neq 0$). Vi låter $t = a^2$ och ser att

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t - 4)(t + 1) = 0.$$

Endast $t = 4 \;\Leftrightarrow a = \pm 2$ ger intressanta lösningar då $t = a^2 \geq 0$.

Om $a = 2$ så blir $b = 1$ och om $a = -2$ blir $b = -1$. Vi får alltså lösningarna $w_1 = 2 + i$ och $w_2 = -2 - i$, vilket i sin tur ger $z_1 = 1$ och $z_2 = -3 - 2i$.
Svar: $z = 1$ och $z = -3 - 2i$. (Genomför även en kontroll!)

3.2.2 Polynom av högre ordning

Faktorsatsen gäller fortfarande.

Faktorsatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(z)$ innehåller faktorn $z - z_0$, det vill säga $p(z) = (z - z_0)q(z)$ för något polynom $q(z)$.

(ii) $z = z_0$ är ett nollställe till $p(z)$, det vill säga att $p(z_0) = 0$.

Ett mycket viktigt resultat är algebrans fundamentalsats (och dess följdsats).

Algebrans fundamentalsats

Sats. Varje polynomekvation $p(z) = 0$ med grad $n \geq 1$ har minst en rot.

Ett korollarium till denna sats är att ett polynom $p(z)$ av grad n har precis n stycken rötter om vi räknar med multiplicitet (dvs en dubbelrot räknas som två rötter etc).

Exempel

Polynomet $p(z) = 4z^2(z-1)(z+\sqrt{2})(z+i)^3$ har grad $n = 7$ (varför?) och har rötterna $z = 0$ (dubbelrot), $z = 1$, $z = -\sqrt{2}$, samt $z = -i$ (trippelrot).

För att bevisa algebrans fundamentalsats skulle vi behöva en del verktyg vi tyvärr inte har tillgång till. Det finns många varianter för ett bevis som bygger på allt från komplex analys (till exempel via maximumprincipen, via argumentprincipen eller som kanske är enklast via Liouvilles sats), abstrakt algebra (till exempel genom att visa att utvidgningen $\mathbf{R}[i]$ är algebraiskt sluten eller via Galoisteori) eller ren topologi (till exempel med kontinuerlig deformeration och vindningstal).

En trevlig egenskap för polynom med reella koefficienter är att det finns en användbar symmetri för komplexa rötter.

Komplexkonjugerade rotpar

Sats. Om ett polynom $p(z)$ har **reella koefficienter** (viktigt) och $z = a + bi$ är en rot så är även $z = a - bi$ en rot. Med andra ord,

$$p(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\overline{z_0}) = 0$$

då $p(z)$ har reella koefficienter.

Bevis. Låt $\alpha \in \mathbf{C}$ vara ett nollställe för $p(z)$, dvs $p(\alpha) = 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned}
p(\overline{\alpha}) &= a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_2(\overline{\alpha})^2 + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^n} + \cdots + a_2\overline{\alpha^2} + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^n + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} \\
&= \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0,
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $\overline{\alpha^k} = (\overline{\alpha})^k$, $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ samt att för $\beta \in \mathbf{R}$ så är $\overline{\beta z} = \beta\overline{z}$. Alltså är $\overline{\alpha}$ också ett nollställe för $p(z)$. □

Ett allvarligt principfel som bör undvikas är att använda föregående sats när koefficienterna inte är reella. Med andra ord:

Reella koefficienter

Observera att denna sats endast gäller då $p(z)$ har reella koefficienter. Till exempel $p(z) = z^2 - iz$ har roten $z = i$, men $z = -i$ är ingen rot. Testa!

3.3 Gissning av nollställen vid heltalskoefficienter

Som utlovat kommer här en systematisk metod för att veta vilka rationella lösningar som är möjliga om vi har heltalskoefficienter i ett polynom.
Låt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

vara ett polynom där koefficienterna $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ är heltal. Om $x = \dfrac{r}{q}$ är en rationell rot (r och q är heltal, r och q har inga gemensamma delare så p/q är fullt förenklad, och $q \neq 0$) så måste r vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. Detta följer av att

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{r}{q}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\frac{r^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{r}{q} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n r^n = -q^n\left(a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{r}{q} + a_0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad a_n r^n = -q\left(a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

samt att

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{r}{q}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 = -r\left(a_n\frac{r^{n-1}}{q^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-2}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{1}{q}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 q^n = -r\left(a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

där r och q är relativt prima. Med andra ord, om $\dfrac{r}{q}$ är ett nollställe så är $a_0 = r \cdot k_1$ och $a_n = q \cdot k_2$ för några heltal k_1 och k_2. Hur använder vi detta i praktiken?

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ i reella faktorer.

Om $x = \dfrac{r}{q}$ är en rot till $p(x)$ så måste alltså r vara en faktor i siffran 3. Möjliga värden på r är $r = \pm 1, \pm 3$. Vidare, q måste vara en faktor i siffran 2. Möjliga värden på q är $q = \pm 1, \pm 2$. Från dessa möjligheter kan vi skapa alla möjliga kombinationer för $\dfrac{r}{q}$:

$$\frac{r}{q} = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

Detta är alltså **alla** möjligheter för att ha en rationell rot. Enda heltalsrötterna som är möjliga är alltså ± 1 och ± 3, och testning visar att ingen av dessa är en rot. Skulle vi bara gissa på måfå kan vi alltså hålla på ganska länge! Testar vi resten av möjligheterna finner vi att $\dfrac{3}{2}$ är ett nollställe. Polynomdivision ger att $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$. Den sista faktorn är strikt positiv så vi är klara.
Svar: $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$.

Kapitel 4

Polynomekvationer och binomialsatsen

4.1 Polynomekvationer

Repetition

Låt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

vara ett polynom.

- Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.
- Räknat med multiplicitet har $p(z)$ precis n nollställen om $a_n \neq 0$.
- $p(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - z_0)$ är en faktor i $p(z)$.
- Om $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ och $p(z_0) = 0$ så gäller att $p(\overline{z_0}) = 0$.

Exempel

Faktorisera polynomet $p(z) = 3z^4 - 15z^3 + 24z^2 - 18z$ fullständigt i komplexa faktorer.

Lösning. Vi börjar med att bryta ut $3z$ och får att $p(z) = 3zq(z)$, där $q(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$. Vi gissar sedan en rot, och finner att $q(3) = 0$. Alltså måste $z - 3$ vara en faktor i $q(z)$. Polynomdivision ger att $q(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 2)$:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2z + 2 \\ \hline
z - 3 & z^3 - 5z^2 + 8z - 6 \\
 & -\,z^3 + 3z^2 \\ \hline
 & -\,2z^2 + 8z \\
 & 2z^2 - 6z \\ \hline
 & 2z - 6 \\
 & -\,2z + 6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Det återstår sålunda att finna rötterna till $z^2 - 2z + 2$. Vi löser ekvationen

$$0 = z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 - 1 + 2 = (z-1)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)^2 = -1,$$

varvid vi ser att $z-1=\pm i$ är de enda möjligheterna. Alltså finner vi lösningarna $z=1\pm i$, och vi kan skriva $z^2-2z+2=(z-(1+i))(z-(1-i))$. Vi kan nu faktorisera $p(z)$ fullständigt enligt

$$p(z)=3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i)).$$

Svar: $p(z)=3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i))$
Observera att det inte finns några kvadratrötter ur negativa (eller komplexa tal för den delen) i lösningen! Rötterna dyker upp direkt vid ekvationslösningen.

Exempel

Ekvationen $2z^4-10z^3+15z^2+50z-125=0$ har en lösning z_0 där $\operatorname{Re} z_0=\operatorname{Im} z_0$. Lös ekvationen fullständigt.

Lösning. Låt $p(z)=2z^4-10z^3+15z^2+50z-125$. Från ledningen vet vi att det finns en rot $z=a(1+i)$ för något $a\in\mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned}0=p(a+ai)&=2a^4(1+i)^4-10a^3(1+i)^3+15a^2(1+i)^2+50a(1+i)-125\\&=-8a^4-20a^3(-1+i)+30ia^2+50a(1+i)-125\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-8a^4+20a^3+50a-125=0,\\-20a^3+30a^2+50a=0,\end{cases}\end{aligned}$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel. Imaginärdelen ser vi direkt har $a=0$ som ett nollställe så vi börjar med att ge oss på den:

$$0=-20a^3+30a^2+50a=-20a\left(a^2-\frac{3}{2}a-\frac{5}{2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad a=0 \text{ eller } a=\frac{3\pm7}{4}.$$

Vi ser att varken $a=0$ eller $a=-1$ löser ekvationen för realdelen:

$$-8a^4+20a^3+50a-125=0,$$

men att $a=5/2$ är en lösning även till denna ekvation. Eftersom koefficienterna i polynomet är reella kommer även $z=a(1-i)$ att vara en rot. Således erhåller vi två nollställen $z=\frac{5}{2}(1\pm i)$. Detta medför att $z^2-5z+\frac{25}{2}$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision visar att

$$p(z)=\left(z^2-5\,z+\frac{25}{2}\right)\left(2z^2-10\right).$$

Den andra faktorn i högerledet blir noll precis då

$$2z^2-10=0\quad\Leftrightarrow\quad z=\pm\sqrt{5}.$$

Alternativt. Man även utföra en polynomdivision av $p(z)$ med faktorn $z^2-2az+2a^2$. Om $z=a(1\pm i)$ är rötter till polynomet måste denna faktor förekomma. Man erhåller då ett villkor på a som leder till att $a=5/2$ precis som ovan. Mer precist så leder polynomdivisionen till att vi finner resten

$$r(z)=(-20a^2+30a+50)z+40a^3-8a^4-30a^2-125$$

och kvoten

$$k(z) = 2z^2 + (4a - 10)z + (15 + 4a^2 + 20a).$$

Eftersom vi vet att polynomdivisionen ska få resten 0 så måste alla koefficienter i $r(z)$ vara noll. Särskilt

$$-20a^2 + 30a + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1 \text{ eller } \frac{5}{2}.$$

Genom att testa ser vi att endast $a = 5/2$ gör att $r(z) = 0$ för alla z.

Svar: $\frac{5}{2}(1 \pm i)$, $\pm\sqrt{5}$.

4.2 Kombinatorik och binomialkoefficienter

Fakultet

Definition. Om n är ett naturligt tal definierar vi $n!$ enligt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2, \quad n \geq 1,$$

och $0! = 1$.

Vi startar alltså med något positivt heltal n och multiplicerar sedan ihop samtliga heltal mindre än eller lika med n ned till och med 2. Alltså blir $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, etc.

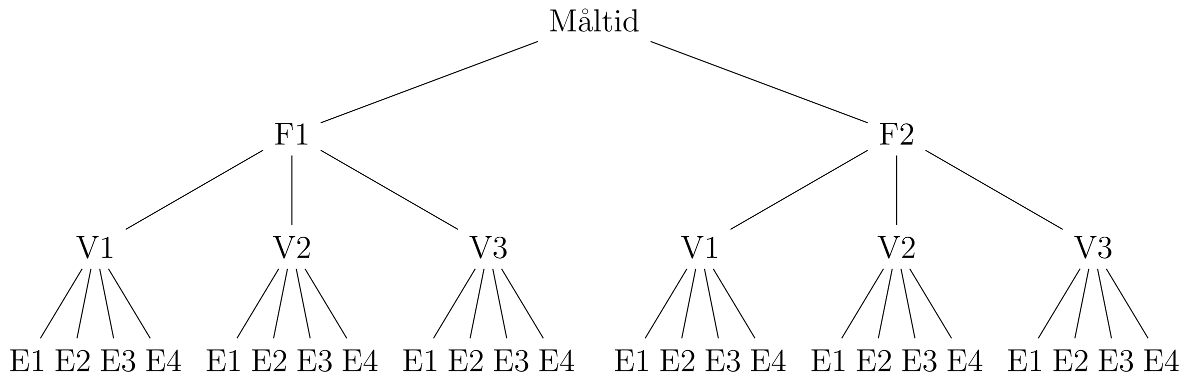
4.2.1 Kombinatorik

Multiplikationsprincipen: Om vi har en tvåstegsprocess av valmöjligheter, där vi i första steget har n_1 möjliga val och i det andra n_2 möjliga val, så finns det totalt sätt $n_1 \cdot n_2$ kombinationer. Det brukar illustreras med så kallade träddiagram där varje ”löv” på trädet representerar en möjlighet. Antalet löv blir precis produkten ovan.

Exempel

En tre-rätters meny har 2 förrätter, 3 varmrätter, och 4 efterätter. Hur många olika måltider kan man beställa om man vill ha förrätt, varmrätt och efterätt?
Enligt multiplikationsprincipen blir det $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ olika måltider.

Man kan illustrera multiplikationsprincipen med hjälp av träddiagram. I figuren nedan väljer vi på nivå 1 mellan två förrätter (F1 och F2). I nästa nivå väljer vi mellan 3 varmrätter (V1, V2 och V3). I det sista steget väljer vi mellan fyra efterrätter. Varje väg genom trädet ger en unik måltid. Hur många sådana vägar finns det? Det är bara att räkna ihop hur många ”löv” det finns på den sista nivån, vilket blir precis 24 st.



I detta exempel var det viktigt i vilken ordning de olika delarna i måltiden tas (en förrätt är en förätt och så vidare).

Ordning

Vad menar vi med att ordna objekt? Till exempel, hur svarar vi på frågan ”på hur många sätt kan vi ordna siffrorna 1,2 och 3?”

Vi kan helt enkelt skriva ut varianterna:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \quad & 2 & 1 & 3 & \quad & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \quad & 2 & 3 & 1 & \quad & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

och ser att det finns 6 möjliga ordningar.

Detta är ett exempel på följande sats ($3! = 6$).

Permutationer

Sats. Om vi har n stycken olika objekt kan dessa ordnas på $n!$ olika sätt. Vi säger att det finns $n!$ olika *permutationer*.

Hur kan vi se detta? En variant är att vi helt enkelt placerar ut våra n objekt i en viss ordning och funderar över hur många val vi har i varje steg på samma sätt som menykonstruktionen ovan!
Vi ställer upp en lista med plats och skriver ut på hur många objekt vi har kvar att välja på i varje steg.

Plats 1	Plats 2	Plats 3	$\cdots$	Plats $n-1$	Plats n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Multiplicerar vi ihop enligt multiplikationsprincipen ser vi att det blir precis $n!$ kombinationer.

4.2.2 Binomialkoefficienter

Något lite krångligare? Vi utnyttjar multiplikationsprincipen för att reda ut följande scenario. Om vi har 10 dörrar och ska öppna 6 stycken, på hur många sätt kan vi göra detta om ordningen (dvs i vilken ordning vi öppnar dörrarna) inte spelar någon roll? Vi har tio dörrar och skall välja ut sex st som öppnas:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
10	9	8	7	6	5

Dörr 1 kan vi välja på 10 olika sätt. När vi sedan väljer dörr 2 finns det bara 9 kvar att välja på. Och så vidare. Ordningen på dörrarna är nu fixerad, och vi får (från multiplikationsprincipen) att det finns

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

sådana val. Detta är alltså svaret om vi vill göra skillnad på i vilken ordning dörrarna öppnas. När de sex dörrarna är valda kan vi variera ordningen mellan dessa 6 på $6!$ olika sätt:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
6	5	4	3	2	1

Vi kan nu ta bort ”multipla” dörrval (de kombinationer som bara skiljer sig åt med i vilken ordning sex st specifika dörrar ligger):

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \binom{10}{6}.$$

Detta uttryck kallas för en binomialkoefficient!

Binomialkoefficient

Definition. Om n och k är icke-negativa heltal så att $k \leq n$ så definieras *binomialkoefficienten* enligt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Exempel

Räkna ut $\binom{27}{25}$.

Lösning. Detta gör vi direkt från definitionen:

$$\binom{27}{25} = \frac{27!}{25! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$$

Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ har alltså tolkningen ”hur många sätt kan vi (utan ordning) välja ut k element från en mängd med n olika element?”

Egenskaper för binomialkoefficienter

(i) $\binom{n}{k}$ är alltid heltal.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ då $n \geq 2$ och $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Exempel

Vid *Camp Crystal Lake* härjar en våldsverkare iklädd en hockeymask, låt oss kalla honom Jason. Jason planerar att mörda tre ungdomar en natt och har nio tillhyggen att välja på. Om vi bortser från ordningen på morden (alltså vem som blir mördad först etc), hur många unika mordserier kan Jason åstadkomma för dessa tre ungdomar om han använder precis ett tillhygge på varje individ (utan upprepning)?

Lösningen är enkel om vi bara abstraherar bort all text. Vi väljer alltså ut 3 objekt från 9 utan ordning. Detta kan göras på $\binom{9}{3}$ olika sätt enligt ovan, och

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Svar. 84 olika sätt.

4.3 Binomialsatsen

Ett minnestrick för att komma ihåg binomialkoefficienter (åtminstone för rimligt små n) är Pascals triangel:

Pascals triangel

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Denna konstruktion bygger på den rekursiva formeln $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ som gäller för vettiga val på n och k. Detta motsvarar alltså i triangeln ovan att varje siffra kan fås genom att summera de siffror som står närmast på raden ovanför. De möjliga k-värdena startar på 0 längst till vänster på varje rad med $\binom{n}{0}$. Sedan kommer $\binom{n}{1}$, följt av $\binom{n}{2}$, och så vidare, till slutligen $\binom{n}{n}$. Rad n har alltså $n+1$ siffror (kontrollera!); en siffra för varje möjligt värde på k. Till exempel så är $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$; kolla på raderna för $n = 4$ och $n = 3$. På så sätt kan vi iterativt konstruera nästa rad om vi känner nuvarande rad.
Ibland skriver man Pascals triangel lite mer som en rätvinklig triangel i stället. Då blir det lite lättare att se hur k hänger ihop med allt:

Pascals (rätvinkliga) triangel

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\cdots$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							

En av de vanligaste tillämpningarna för binomialkoefficienter är binomialsatsen.

Binomialsatsen

Sats. Om n är ett ickenegativt heltal så gäller för alla x att

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Bevis. Vi skriver ut parentesen:

$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ st}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Så hur bestämmer vi koefficienterna a_k? Om vi kikar närmare på produkten i mellanledet så ser vi att vi ur varje parentes kommer att välja ett x eller en etta när vi multiplicerar ihop allt. Om vi till exempel tittar på x^5 så ska vi alltså välja 5 stycken x och resten, dvs $n-5$ stycken, ettor. Hur många sätt kan vi välja 5 objekt av n stycken utan ordning (ingen skillnad på olika x eller olika ettor)? Svaret är så klart binomialkoefficienten $\binom{n}{5}$, vilket då visar formeln i satsen ovan eftersom argumentet kan upprepas för varje k.

Exempel

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

Ofta ser man binomialsatsen på följande form:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Detta kan visas med följande manipulation (såvida $b \neq 0$):

$$(a+b)^n = b^n \left(\frac{a}{b}+1\right)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En typisk användning av binomialsatsen är att identifiera vad koefficienten före en viss term är i en summa av typen i föregående exempel.

Exempel

Bestäm koefficienterna före x^8 och x^9 i uttrycket $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$.

Lösning. Vi använder binomialsatsen och skriver

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{k-(10-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{2k-10}.\end{aligned}$$

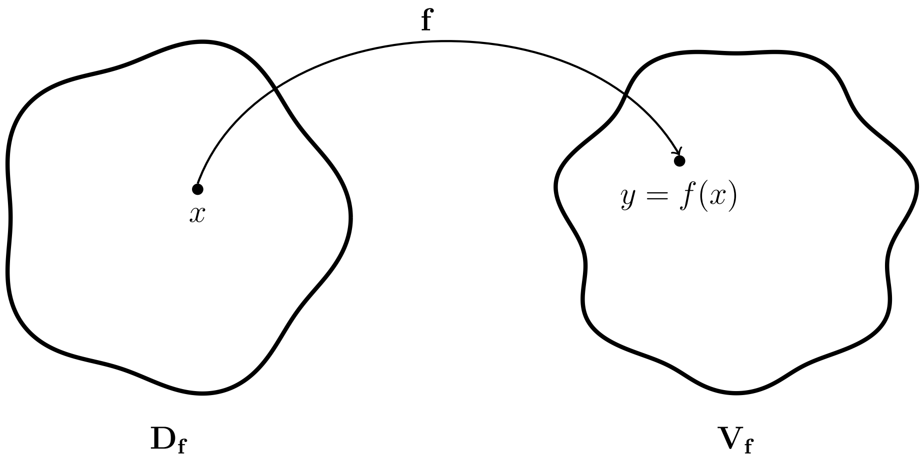
Vi ser att x får exponenten 8 om och endast om $2k-10=8 \Leftrightarrow k=9$. Koefficienten blir alltså $\binom{10}{9} 2^{10-9} = 20$. När dyker då x^9 upp? Vi skulle behöva $2k-10=9$, eller $k=19/2$. Detta är inget heltal mellan 0 och 10 (de heltal vi summerar över). Således saknas termen x^9, koefficienten är alltså noll.
Svar: 20 respektive 0.

Kapitel 5

Funktioner

Vad är egentligen en funktion?

Definition. En funktion f är en regel som till varje punkt x i en definitionsmängd D_f tilldelar precis ett y enligt sambandet $y = f(x)$.



Denna definition kan göras lite mer ordentlig med så kallade relationer på mängder, men vi överlämnar detta till senare kurser. Observera här att vi inte sagt något om att definitionen bara gäller reella tal. Eller ens tal överhuvudtaget! Det kunde lika gärna handla om apelsiner eller solar ute i rymden. För vår del (i denna kurs) kommer vi i denna kurs oftast att betrakta reellvärda funktioner (där $y \in \mathbf{R}$ alltså), och i princip alltid är även $x \in \mathbf{R}$ (eller någon delmängd). Ett undantag är faktiskt polynomen $p(z)$ som vi diskuterade ovan, där $z \in \mathbf{C}$ generellt sätt. Funktioner av en komplex variabel brukar man ta upp i separata kurser.

Funktion och funktionsvärde

Observera att det är f som är funktionen. Uttrycket $f(x)$ är det värde funktionen antar i punkten $x \in D_f$. Det är alltså ganska slarvigt att skriva uttryck i stil med ”funktionen $f(x)$”, men vi tillåter oss göra det ibland.

Värdemängd

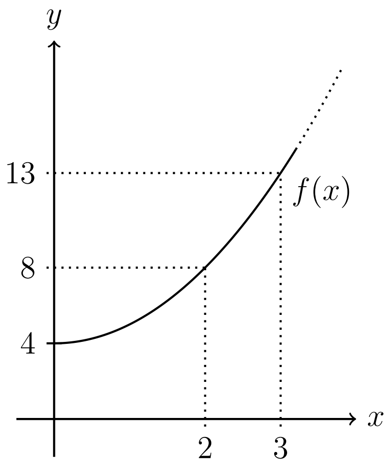
Definition. En funktions värdemängd V_f definieras som alla möjliga y-värden vi kan få ur sambandet $y = f(x)$,
$$V_f = \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Generellt sett kan värdemängden vara svår att bestämma för en godtycklig funktion. Vissa verktyg kommer att introduceras i envariabelanalysen, men för oss just nu är vi begränsade till ganska enkla funktioner. Till exempel vissa enkla polynom kan vi enkelt rita och se vad värdemängden blir (även om vi också då implicit använder vissa resultat ni kommer att få se i nästa kurs).

Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ för $x \geq 0$. Bestäm V_f och rita funktionen.

Skissar vi funktionen kan vi till exempel göra med en klassisk värdetabell för att få en uppfattning. Sen är det ett polynom så det hela beter sig ganska snällt.



x	$y = 4 + x^2$
0	4
1	5
2	8
3	13
4	20
...	...

Det som är bra med en bild här är att vi direkt kan se att varje y-värde större än eller lika med 4 kan träffas av (precis ett) x-värde. Till exempel så blir $y = 5$ precis då $5 = 4 + x^2$, dvs då $x^2 = 1$. Eftersom D_f ges av villkoret $x \geq 0$ så är det bara $x = 1$ som passar.
Svar. $V_f = [4, \infty[$.

Figuren ovan brukar kallas **grafen** för funktionen f. Formellt så är grafen en mängd av punkter (x, y), där $y = f(x)$, som beskriver hur definitionsmängd och värdemängd hänger ihop. För vår del räcker det med att betrakta grafen som en ritad figur där vi ser hur x och y-värden hänger ihop.

Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$. Bestäm D_f och V_f.

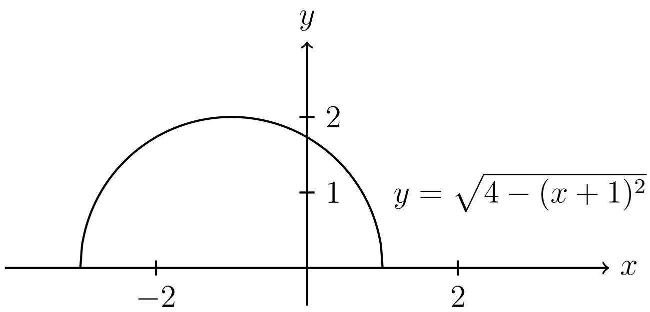
Borde inte D_f vara angiven? Inte nödvändigtvis. Om inget står brukar vi anta att D_f är största möjliga mängd där f är naturligt definierad. I detta fall är detta när kvadratroten är definierad. Hur reder vi ut när detta sker? Vi börjar med att analysera det som står i rottecknet. Det är ett polynom av grad två, så en vettig start är att kvadratkomplettera:

$$3 - x^2 - 2x = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - ((x+1)^2 - 1) = 4 - (x+1)^2.$$

Eftersom kvadratorten bara är definierad för icke-negativa argument så måste $4 - (x+1)^2 \geq 0$. Faktoriseringen och en teckentabell visar att $-3 \leq x \leq 1$ är nödvändigt. Så vilka y-värden kan vi få ut? Vi studerar ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 - (x+1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Detta är inget annat än ekvationen för övre delen av en cirkel med radie 2 och centrum i $(-1, 0)$. Största möjliga värde är alltså 2 (när $x = -1$) och minsta möjliga värde är 0 (när $x = -3$ eller $x = 1$). I en figur kan det mesta vi precis räknat ut utläsas direkt (men man måste så klart rita figuren på något sätt också).

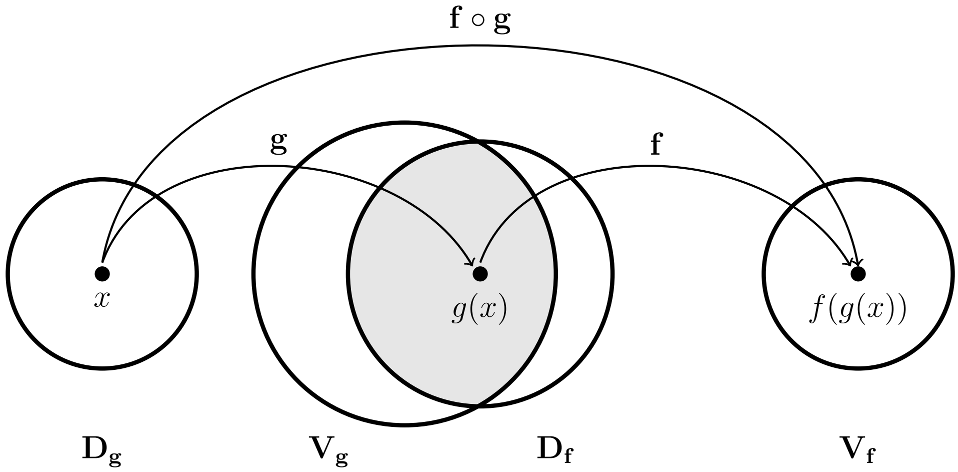


Svar. $D_f = [-3, 1]$ och $V_f = [0, 2]$.

Vad händer om vi sätter ihop två funktioner?

Sammansättning

Definition. Sammansättning $f \circ g$ av två funktioner f och g definieras som $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ för de x där detta uttryck har mening.



Observera här att för $f \circ g$ blir definitionsmängden

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Det följer alltså att $D_{f \circ g} \subset D_g$, men i allmänhet gäller att $V_g \neq D_f$. Var således försiktiga vid hanterandet av sammansättningar.

Exempel

Låt $g(x) = 1 - x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Jämför $f \circ g$ och $g \circ f$.

Ser vi på f och g separat så är $D_f = [0, \infty[$ och $D_g = \mathbf{R}$. Om vi betraktar $f \circ g$ så måste $1 - x^2 \geq 0$, eller ekvivalent, $-1 \leq x \leq 1$. Så,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1,$$

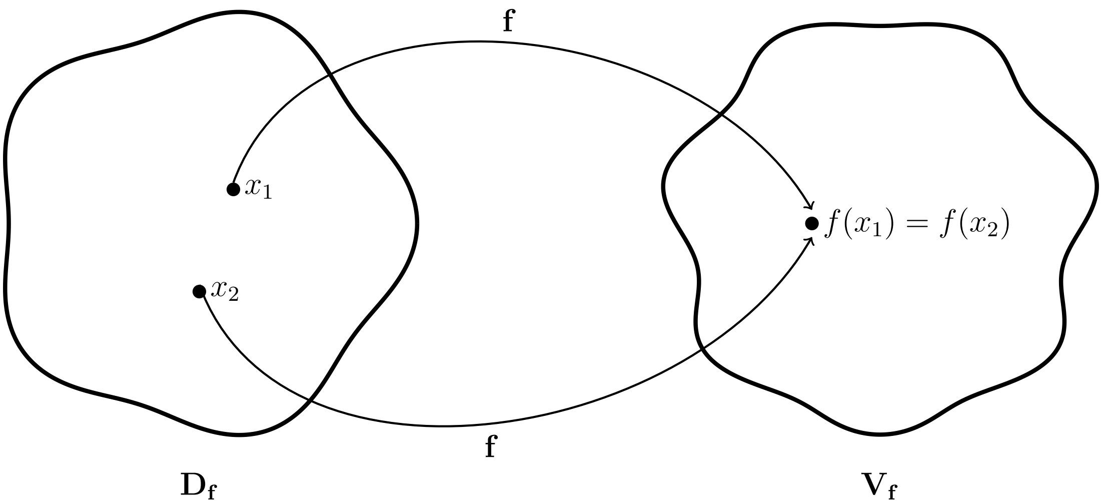
och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{för } x \geq 0.$$

Observera att vi får både olika sammansatta uttryck och olika definitionsmängder för $f \circ g$ och $g \circ f$. Ordningen är alltså mycket viktig både för värdet och definitionsmängd för den sammansatta funktionen!

5.1 Inverterbarhet

En mycket vanlig fråga när vi analyserar funktioner är om funktioner är ”omvändbar” i den meningen att om vi känner till utvärdet $y = f(x)$, går det att hitta ett enda x (så det endast finns ett alternativ) som ger detta y? Funktioner som har denna egenskap brukar vi kalla för **injektiva**. Om det finns två punkter $x_1, x_2 \in D_f$ så att $y = f(x_1) = f(x_2)$ så kan vi inte bestämma vilket alternativ som givit ett visst y-värde.



Injektivitet

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om det till varje $y \in V_f$ finns precis ett $x \in D_f$ så att $y = f(x)$. Eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Alla injektiva funktioner går att invertera.

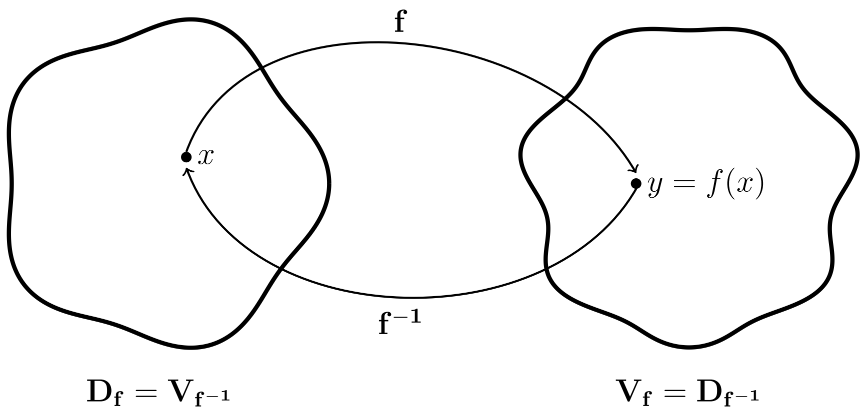
Invers

Definition. För en injektiv funktion f så definierar vi den inversa funktionen f^{-1} enligt

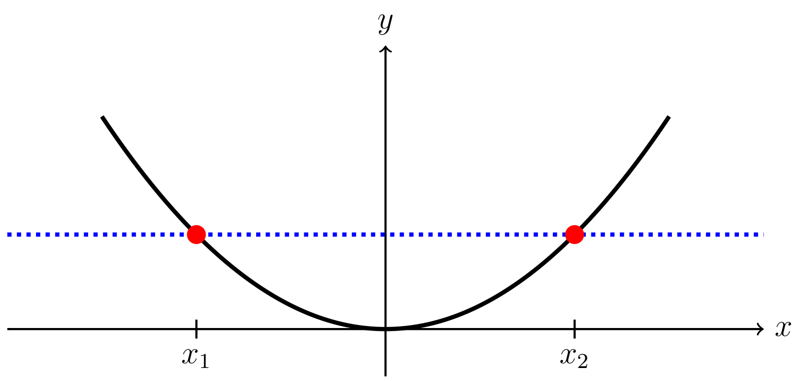
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Märk att av nödvändighet så gäller för definitions- och värdemängder att

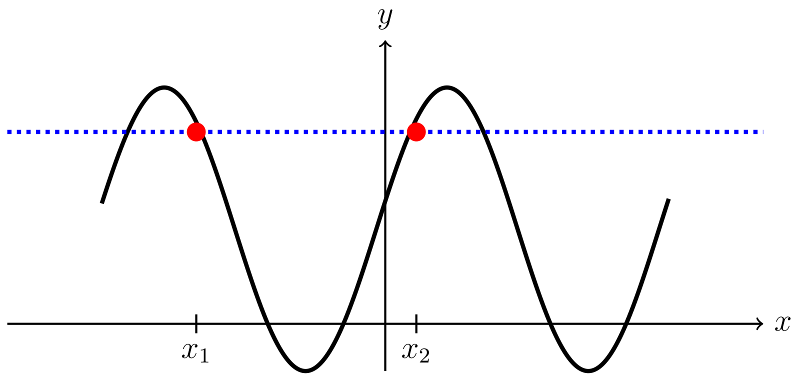
$$D_{f^{-1}} = V_f \qquad \text{och} \qquad V_{f^{-1}} = D_f.$$



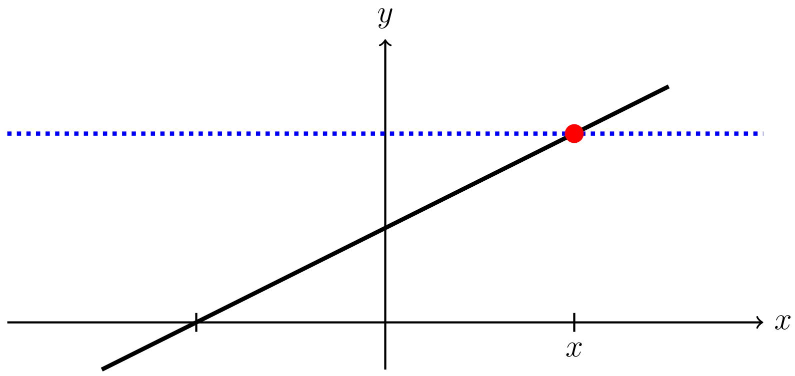
Så hur ser en injektiv funktion ut? Låt oss först titta på ett par fall där funktionen inte kan vara injektiv (utan att inskränka definitionsmängden).



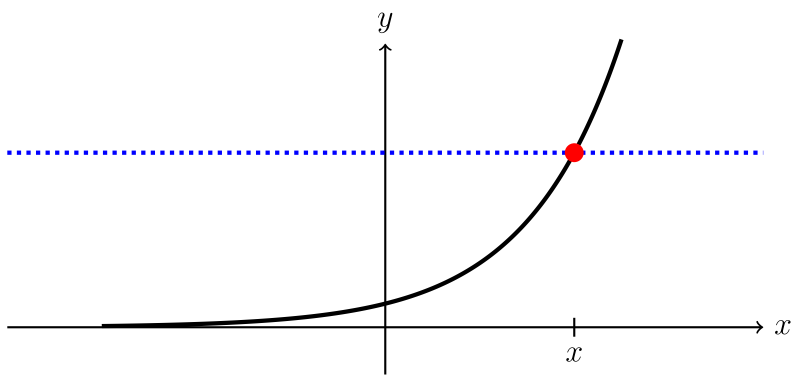
Här ser vi att det för alla y-värden större än noll så hittar vi 2 möjliga x-värden som skulle ge detta y-värde. Således gäller det *inte* att $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen är inte injektiv.



Här är ett exempel som likt ovan innebär att det finns flera x-värden som ger samma y-värde (till och med ännu fler alternativ än i förra exemplet). Funktionen är således inte injektiv (utan att vi begränsar definitionsmängden).



I detta exempel ser det ut som att varje x-värde endast hör ihop med ett y-värde. Alltså med andra ord att $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen verkar vara injektiv.



Även i detta exempel ser det ut som att varje x-värde endast hör ihop med ett y-värde Det är lite svårt att avgöra vad som händer när x blir ett stort negativt tal, så en mer noggrann undersökning är nödvändig. Men det är inte orimligt att funktionen är injektiv.

Så en naturlig fråga blir hur vi hittar inversen (om den finns)? Lösningen är ganska enkel. Vi löser helt enkelt ut x ur ekvationen $y = f(x)$. Skulle det vara så att detta inte är möjligt att göra på ett entydigt sätt så finns ingen invers.

Exempel

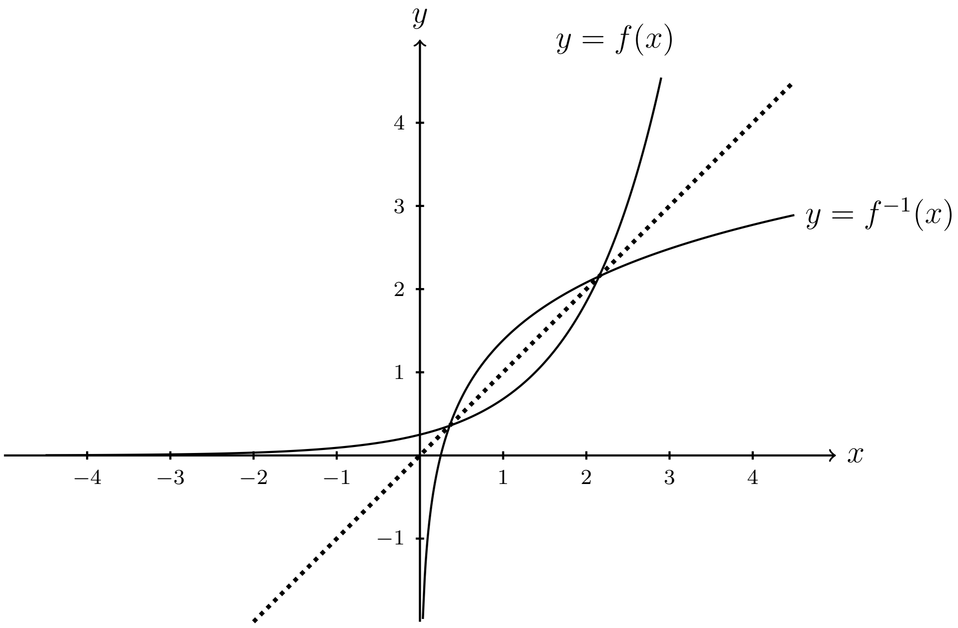
Finn ett uttryck för inversen (om möjligt) till $f(x) = \sqrt{4-(x+1)^2}$, $x \geq -1$.

Lösning. Vi försöker helt enkelt att lösa ut x ur ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4-(x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{4-y^2}$$

Men $x \geq -1$ så endast $x = -1 + \sqrt{4-y^2}$ är möjligt. Eftersom vi bara får ett möjligt svar så finns inversen. Detta följer av att vi startar med det sanna påståendet att $y = f(x)$ (vilket måste gälla eftersom vi *definierar* y enligt den likheten), så det sista påståendet i vår kedja av implikationer *kan inte* vara falskt. Hittar vi bara en möjligt så *måste* detta vara ett uttryck för inversen.
Svar. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4-x^2}$.

Grafiskt går det att representera inversen som speglingen av kurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$.



Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ där $D_f = \mathbf{R}$. Undersök om f är injektiv.

Lösning. Nej, f kan inte vara injektiv. Kvadraten är ett vanligt tecken på att en funktion inte är injektiv om D_f innehåller viss symmetri kring nollan. Specifikt, till exempel

$$f(-1) = 4 + (-1)^2 = 4 + (1)^2 = f(1).$$

Alltså är f inte injektiv.

5.2 Monotonicitet

Monotonicitet

Definition. En funktion kallas (om för alla $x_1, x_2 \in D_f$)

(i) **växande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(ii) **strängt växande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$;

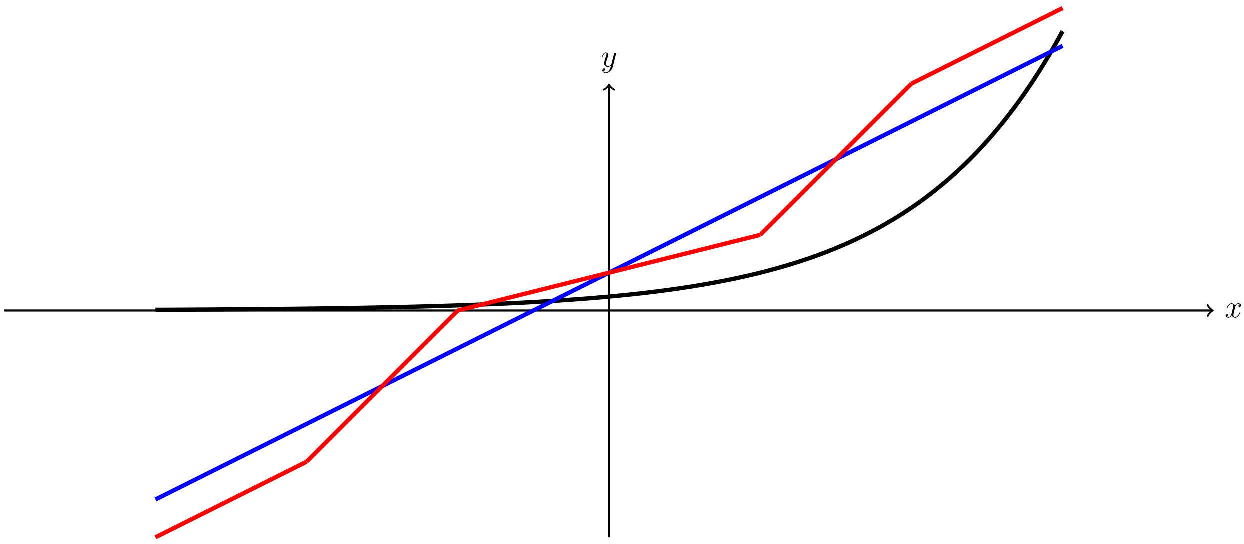
(iii) **avtagande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(iv) **strängt avtagande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) > f(x_2)$;

(v) **monoton** om f är växande eller avtagande;

(vi) **strängt monoton** om f är strängt växande eller strängt avtagande.

Nedan följer 3 exempel på (strängt) växande funktioner.



Avtagande eller icke-växande?

I litteraturen är uttrycket avtagande/växande inte entydigt bestämt. I vissa fall (som vi definierat det) innebär till exempel avtagande att vi endast har $\leq$, så en konstant funktion uppfyller detta villkor. Verkar det vettigt att kalla en konstant funktion för både växande och avtagande? Det är en definitionsfråga. Ett vettigare uttryck är egentligen, till exempel, icke-växande. Var försiktig om ni läser andra böcker!

Så hur visar man att något är, till exempel, strängt växande? I envariabelanalyskursen kommer ni att lära er andra metoder, men i detta fall är vi tvungna att visa att olikheten i föregående definition är uppfylld. Vi betraktar ett exempel.

Exempel

Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

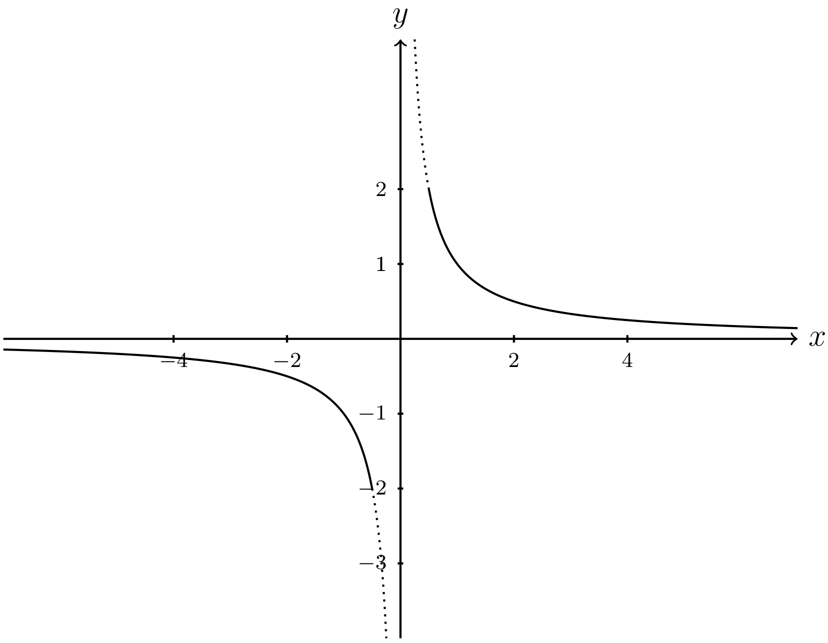
Lösning. Vi undersöker $f(x_2) - f(x_1)$ och visar att detta uttryck är strikt större än noll om $x_1 < x_2$. Vi ser att $x_1 - x_2$ borde vara en faktor så vi försöker faktorisera:

$$\begin{aligned} x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_2 - x_1)\left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}\right) > 0 \end{aligned}$$

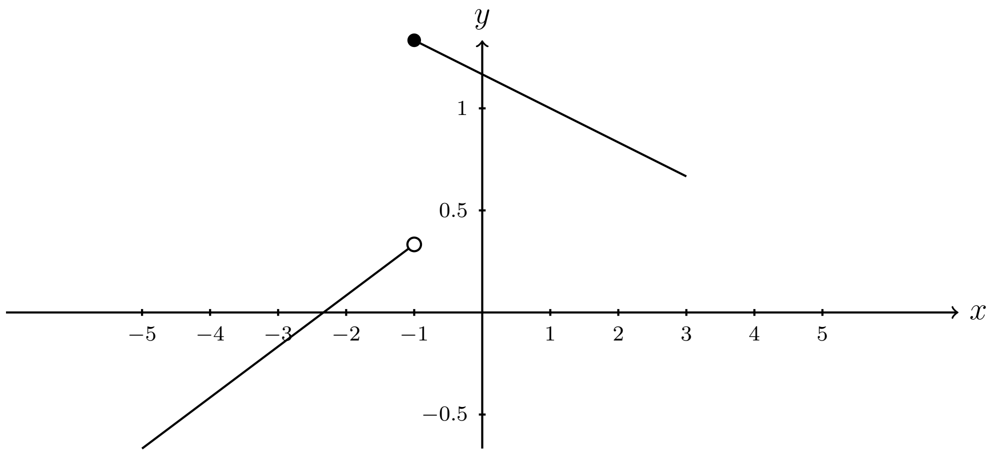
ty $(x_1 + x_2/2)^2 + 3x_2^2/4 > 0$ om $x_2 > x_1$ och $x_2 - x_1 > 0$.

Sats. En strängt monoton funktion är alltid inverterbar.

Märk väl att satsen ovan endast är en implikation. En inverterbar funktion behöver inte vara strängt monoton. Ett enkelt exempel är funktionen $n(x) = \dfrac{1}{x}$ med $D_n = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Figuren nedan visar utseendet.



Uppenbarligen gäller inte att om $x_1 < x_2$ med $x_1, x_2 \in D_n$ så är $n(x_1) > n(x_2)$ i fallet då $x_1 < 0$ och $x_2 > 0$. Men lokalt kring varje punkt $x \in D_n$ gäller så klart att n är strängt avtagande. Problemet uppstår i ”punkteringen” av definitionsmängden där funktionen tillåts hoppa ordentligt. Fusk? Kan vi hitta exempel på ett sammanhängande intervall? Ett sätt att konstruera ett sådant exempel är att skarva ihop två funktioner — en växande och en avtagande — så det uppstår ett ”hopp” som separerar graferna. Ta till exempel följande funktion h med definitionsmängd $D_h = [-5, 3]$.



Det är tydligt att varje y-värde i värdemängden motsvarar precis ett x-värde i definitionsmängden, så funktionen är inverterbar. Däremot är den så klart varken strängt växande eller avtagande. Nu kanske man kan tycka att h ändå i princip är monoton eftersom den är det på olika delintervall, så den går att dela upp i två delar där h är endera strängt avtagande eller strängt växande. Skulle den slutsatsen gälla generellt? Går det alltid att dela upp i mindre intervall där funktionen är strängt växande eller avtagande? Svaret är nej. Betrakta till exempel följande roliga funktion:

$$d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen d definieras alltså enligt $d(x) = x$ om x är rationell och $d(x) = 1 - x$ om x är irrationell. På intervallet $]0, 1[$ är d uppenbarligen inverterbar ty $d^{-1}(x) = d(x)$, men det finns inget delintervall där d är växande eller avtagande. Att ge sig in på att rita funktionen blir dock problematiskt (varför?).
När begreppet kontinuitet introduceras i envariabelanalysen får ni svaret på frågan om en *kontinuerlig* funktion definierad på ett intervall kan vara inverterbar utan att vara strängt växande eller avtagande på definitionsintervallet.

5.3 Logaritmfunktioner

Ni har säkert stött på logaritmer tidigare för att svara på frågor av typen ”om $10^x = 12$, vad blir x?” Vi svara på den frågan genom att använda 10-logaritmen. För oss kommer det dock att vara mer användbart att introducera den *naturliga logaritmen* (som vi sedan kan använda för att ta fram logaritmer med andra *baser*).

Den naturliga logaritmen

Definition. Vi definierar funktionen $\ln\colon]0, \infty[\to \mathbf{R}$ som den deriverbara funktion med definitionsmängd $]0, \infty[$ och värdemängd $\mathbf{R}$ som uppfyller att

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0, \tag{5.1}$$

och

$$\ln(x) < x - 1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \tag{5.2}$$

Den finns nu två uppenbara frågor: hur vet vi att en funktion med dessa egenskaper överhuvudtaget existerar och om det finns sådana funktioner, hur vet vi att det bara finns en? Detta är en fråga om existens och entydighet, något vi tryckt hårt på när vi arbetat med ekvationslösning (vi har konsekvent strävat efter att behålla ekvivalenser).
Nästa problem är att vi behöver derivatan och gränsvärden för att bevisa detta. Ni kommer få se dessa begrepp mer ordentligt i nästa analyskurs, men vi kommer använda dessa verktyg för att svara på frågorna ovan. Men innan dess, låt oss undersöka vilka konsekvenser vi erhåller endast av definitionen ovan.
Låt $x, y > 0$. Då gäller följande egenskaper.

1. Vi ser att $\ln(1) = 0$ ty
$$\ln(1) = \ln(1 \cdot 1) = \ln(1) + \ln(1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1) = 0.$$

2. Vi erhåller en regel för kvoter genom
$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

3. En följd av föregående två egenskaper är att
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

4. För $p \in \mathbf{Z}$ gäller att
$$\ln x^p = p \ln x.$$
Denna egenskap följer av de föregående, vilket kan visas genom att betrakta $x^p = x \cdot x \cdots x$ (om $p > 0$). För $p < 0$ kan vi betrakta $-\ln x^p$. Observera att vi inte kan säga något om fallet då p ej är ett heltal i nuläget; vi återkommer till detta under nästa föreläsning.

5. Eftersom $\ln(t) < t - 1$ för $t \neq 1$ (och $t \neq 0$) så gäller att (med $t = 1/x$)
$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$
så
$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \tag{5.3}$$

6. Två följder av föregående dubbelolikhet är att
   (a) om $x > 1$ så är $\ln x > 0$;
   (b) om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$.

7. Den naturliga logaritmen ln är strängt växande: låt $x_2 > x_1 > 0$. Då är $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$, så
$$0 < \ln\frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x_1 < \ln x_2.$$

5.4 Bevis för att ln existerar

Vi visar nu att ln existerar och är entydigt bestämd. Som nämnt ovan så behöver vi verktyg vi inte gått igenom ordentligt, men återkom gärna till detta avsnitt när ni studerat gränsvärden och derivata i nästa kurs.

Sats. Låt $L\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}$ vara en deriverbar funktion. Då gäller att

$$L(xy) = L(x) + L(y), \quad \text{för alla } x, y > 0,$$

om och endast om

$$L(1) = 0 \quad \text{och} \quad L'(x) = L'(1)\,\frac{1}{x}.$$

Bevis. Vi antar först att $L(xy) = L(x)+L(y)$. Enligt tidigare vet vi att detta medför att $L(1) = 0$. Vidare så erhåller vi att

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - L(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L(x) + L\left(1+\frac{h}{x}\right) - L(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right) - L(1)}{h/x} = \frac{1}{x}L'(1). \end{aligned}$$

Om vi istället antar att $L'(x) = L'(1)\,\frac{1}{x}$ och $L(1) = 0$ så ser vi att för $y > 0$ så gäller att

$$\frac{d}{dx}\left(L(xy)\right) = y\cdot L'(xy) = y\cdot\frac{L'(1)}{xy} = \frac{L'(1)}{x},$$

så $L(x)$ och $L(xy)$ har samma derivata (vi använde här kedjeregeln för att beräkna derivatan). Då kan dessa uttryck endast skilja sig åt med en konstant, säg

$$L(xy) = L(x) + C,$$

för något $C \in \mathbf{R}$. Men då $L(1) = 0$ så vet vi att

$$L(y) = L(1\cdot y) = L(1) + C = C,$$

så

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

Sats. För funktionen $L(x) = \ln(x)$ gäller att $L'(1) = 1$.

Bevis. Detta faktum följer ty för $h \neq 0$ så är

$$\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} L\left(1+\frac{h}{x}\right) < \frac{x}{h}\left(1+\frac{h}{x}-1\right) = 1$$

samt

$$\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} \cdot L\left(1+\frac{h}{x}\right) > \frac{x}{h} \cdot \frac{1+h/x-1}{1+h/x} = \frac{1}{1+\frac{h}{x}}$$

enligt olikhet (5.3). Eftersom detta gäller för alla $h \neq 0$ så följer det att

$$\lim_{h \to 0} \frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = 1$$

då både övre och undre gräns blir 1 då $h \to 0$. Kom ihåg *instängningsprincipen* till TATA41!

Funktionen $L(x) = \ln(x)$ kan således definieras som den primitiva funktion $L(x)$ till $L'(x) = \dfrac{1}{x}$ som uppfyller att $L(1) = 0$.

Kapitel 6

Logaritmer och exponentialfunktioner

6.1 Den naturliga logaritmen

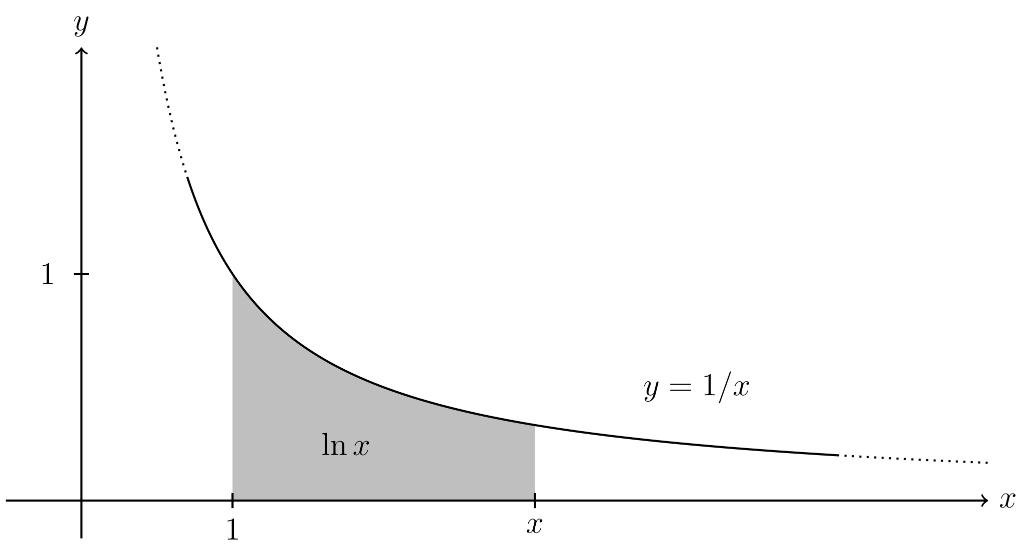
Vi introducerade den naturliga logaritmen tidigare och kommer nu fortsätta att analysera följderna av detta.

6.1.1 En alternativ definition

Ekvivalent med den definition vi sett tidigare kan man (som i boken) definiera den naturliga logaritmen enligt nedan.

Definition. Den naturliga logaritmen $\ln x$ för $x > 0$ definieras som $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$

Här ser vi att vi använder integralbegreppet utan att direkt ha definierat det innan, så vi har ett liknande problem som med den tidigare definitionen. Vi återkommer till detta i envariabelanalysen när Riemann-integralen behandlas. Förhoppningsvis kommer vi ändå ihåg att man kan tolka en bestämd integral som arean under kurvan. En fördel med denna definition är att det blir lite enklare att få en bild av hur funktionen ser ut.



6.1.2 Egenskaper för logaritmen

Vi repeterar lite egenskaper för logaritmen.

Egenskaper

Sats. Den naturliga logaritmen har bland annat följande egenskaper:

(i) $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbf{R}$;

(ii) $\ln xy = \ln x + \ln y$ för $x, y > 0$;

(iii) $\ln x < x - 1$ för $x > 0$ och $x \neq 1$;

(iv) $\ln 1 = 0$;

(v) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ för $x, y > 0$;

(vi) $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ för $x > 0$;

(vii) $\ln x^p = p \ln x$ för $x > 0$ och $p \in \mathbf{Z}$.

Vi har sett hur man tar fram flera av dessa egenskaper enbart genom att använda (ii), vilket var vad vi använde för att definiera logaritmen tidigare. Vi kan även lyfta fram den användbara olikheten vi såg sist.

Instängningssats

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \quad \text{för } x > 0 \text{ och } x \neq 1.$$

Vi kan även använda denna egenskap för att visa att $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$ och $\ln x > 0$ då $x > 1$, även om detta också är tämligen klart från Riemann-integralen.
Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Exempel

Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning. För att alla ingående uttryck ska vara definierade krävs att $x+1 > 0$, $5+x > 0$, och $x+2 > 0$. Från detta ser vi att $x > -1$ krävs för att samtliga uttryck ska vara definierade. Antag att $x > -1$. Då gäller

$$\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((x+1)(x+2)\big) = \ln(5+x),$$

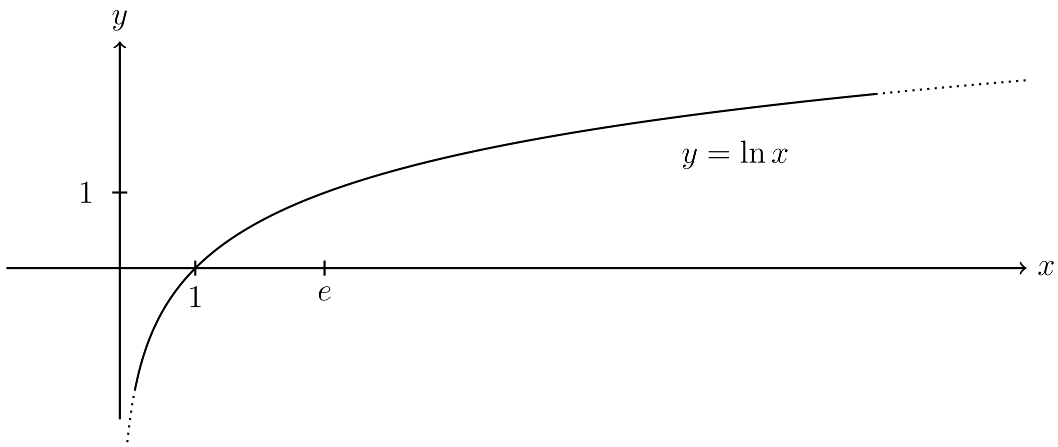
och eftersom ln är strängt växande gäller då att

$$(x+1)(x+2) = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) = 0.$$

Endast $x = 1$ är en lösning då $x = -3$ ej uppfyller kravet $x > -1$.
Svar: $x = 1$ enda lösningen.

Logaritmer och negativa tal?

Observera att vi endast har definierat $\ln x$ för $x > 0$. Men detta innebär absolut **inte** att $\ln x > 0$ för alla x. Om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$. Det är skillnad på definitionsmängden och värdemängden!



Observera även att till exempel $\ln(xy)$ kan vara definierad även om $\ln x$ och $\ln y$ inte är det. Det räcker att produkten blir positiv, så exempelvis $x = -2$ och $y = -3$ skulle fungera. Detta kan ställa till det när vi löser ekvationer som innehåller logaritmer, så var försiktiga!

6.2 Exponentialfunktionen

Eftersom ln är strängt växande finns en invers som vi kallar exp, dvs

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(y),$$

där $D_{\exp} = \mathbf{R}$ och $V_{\exp} =]0, \infty[$. Som vanligt (med inverser) gäller

$$\ln(\exp x) = x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad \exp(\ln x) = x, \quad x > 0.$$

Det följer också (på grund av att ln är strängt växande) att exp är strängt växande. Detta gäller generellt.

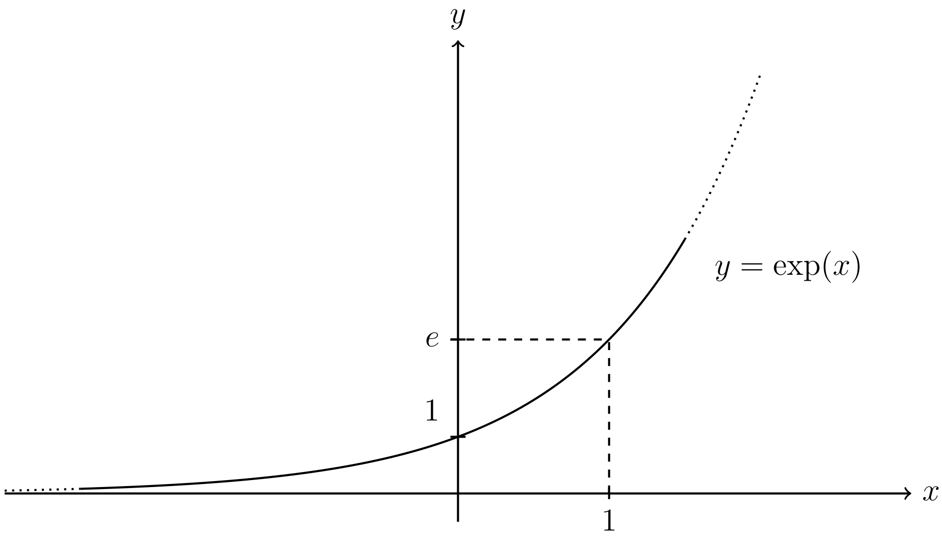
Sats. Om $f\colon D_f \to V_f$ är strängt växande så är $f^{-1}\colon V_f \to D_f$ strängt växande.

Bevis. Låt $x, y \in V_f = D_{f^{-1}}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{f(f^{-1}(x))}_{=x} < \underbrace{f(f^{-1}(y))}_{=y} \quad \Leftrightarrow \quad \big/ \text{ ln strängt växande } \big/ \\ &\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) < f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Vi utnyttjar här att en strängt monoton funktion bevarar olikheter. □

Så hur ser $y = \exp(x)$ ut?



Om vi jämför graferna för ln och exp så kan man se att $\exp x$ är spegelbilden av $\ln x$ kring linjen $y = x$. Detta gäller generellt för inverser! Så hur hör nu funktionen exp ihop med talet e?

Talet e

Definition. Talet e definieras som $e = \exp(1)$.

Talet e är irrationellt, har närmevärdet $e \approx 2.718$ och uppfyller att $\ln e = 1$.
Om $p \in \mathbf{Z}$ så följer det av logaritmlagarna ovan att

$$\ln e^p = p \ln e = p \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad e^p = \exp(\ln e^p) = \exp(p).$$

Vi väljer därför att skriva $e^x = \exp(x)$. Det är alltså så här vi *definierar* talet e^x genom funktionen exp för alla x.

Talet e^x

Definition. För $x \in \mathbf{R}$ definierar vi e^x enligt $e^x = \exp(x)$.

$\exp(x)$ och e^{x}

Vi kommer att använda dessa uttryck helt utbytbart, de betyder alltså samma sak. När vi skriver e^x så syftar vi på funktionsvärdet $\exp(x)$. Notationen exp är lämplig ibland, speciellt när det är komplicerade argument. Till exempel kanske vissa tycker

$$\exp\left(1 + \sqrt{x\sqrt{x} - x^3 \sin x}\right)$$

är lättare att läsa än

$$e^{1+\sqrt{x\sqrt{x}-x^3 \sin x}}.$$

Egenskaper

Funktionen som definieras av e^x har bland annat följande egenskaper:

(i) $e^0 = 1$ och $e^1 = e$;

(ii) $\ln e^x = x$ för $x \in \mathbf{R}$ och $e^{\ln x} = x$ för $x > 0$;

(iii) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(iv) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;

(v) $(e^x)^p = e^{px}$ då $p \in \mathbf{Z}$.

Bevis av dessa egenskaper följer av motsvarande egenskap för den naturliga logaritmen. Till exempel så ser vi att

$$e^x e^y = \exp\left(\ln\left(e^x e^y\right)\right) = \exp\left(\ln e^x + \ln e^y\right) = \exp(x+y).$$

Exempel

Lös ekvationen $e^x + 4e^{-x} = 4$.

Lösning. Eftersom $e^x > 0$ så kan vi multiplicera likheten med e^x och det följer då att

$$e^x + 4e^{-x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$

Låt $t = e^x$. Då måste $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$, vilket endast $t = 2$ uppfyller. Alltså är $e^x = 2$, eller ekvivalent, $x = \ln 2$.
Svar: $x = \ln 2$.
Något bökigare? Kanske som handlar om inversen till ett uttryck?

Exempel

Låt $f(x) = \ln\left(\sqrt{7} - \ln(1+2x)\right)$. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) ett uttryck för inversen.

Lösning. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $1 + 2x > 0$ samt $\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0$. Alltså måste $x > -\frac{1}{2}$ och

$$\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{7}} > 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right) > x$$

eftersom ln är strängt växande. Notera här att vi motiverar att vi kan ta bort ln på båda sidor i olikheten ty ln är *strängt växande*. Ekvivalent skulle vi kunna motivera det steget genom att säga att exp är strängt växande. Vad vi inte bör påstå är att det är ekvivalent på grund av att ln (eller exp) är injektiv eller inverterbar. Varför?
Således ges D_f av de $x \in \mathbf{R}$ så att

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right).$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln(\sqrt{7} - \ln(1+2x)) \quad &\Rightarrow \quad \exp(y) = \sqrt{7} - \ln(1+2x) \\ &\Rightarrow \quad 1 + 2x = \exp(\sqrt{7} - \exp(y)) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\Big(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\Big). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Eftersom vi bara har ett alternativ ges inversen av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\Big(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\Big).$$

Svar: $D_f = \Big\{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\Big(e^{\sqrt{7}} - 1\Big)\Big\}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\Big(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\Big)$.
Vad hade hänt om vi fått flera möjligheter i ekvation $(*)$ ovan? Tänk på att vi "bara" räknade med implikationer!

6.3 Potensfunktioner

Potensfunktioner

Definition. Vi definierar potensfunktionen x^α enligt $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ då $x > 0$ och $\alpha \in \mathbf{R}$, samt $x^\alpha = 0$ då $x = 0$ och $\alpha > 0$.

Detta är en rimlig definition. Till exempel vet vi att

$$x^p = (e^{\ln x})^p = e^{p \ln x}, \quad p \in \mathbf{Z},$$

vilket stämmer överens med definitionen ovan.
Eftersom potensfunktioner är definierade via exp-funktionen så gäller motsvarande regler. Till exempel så är

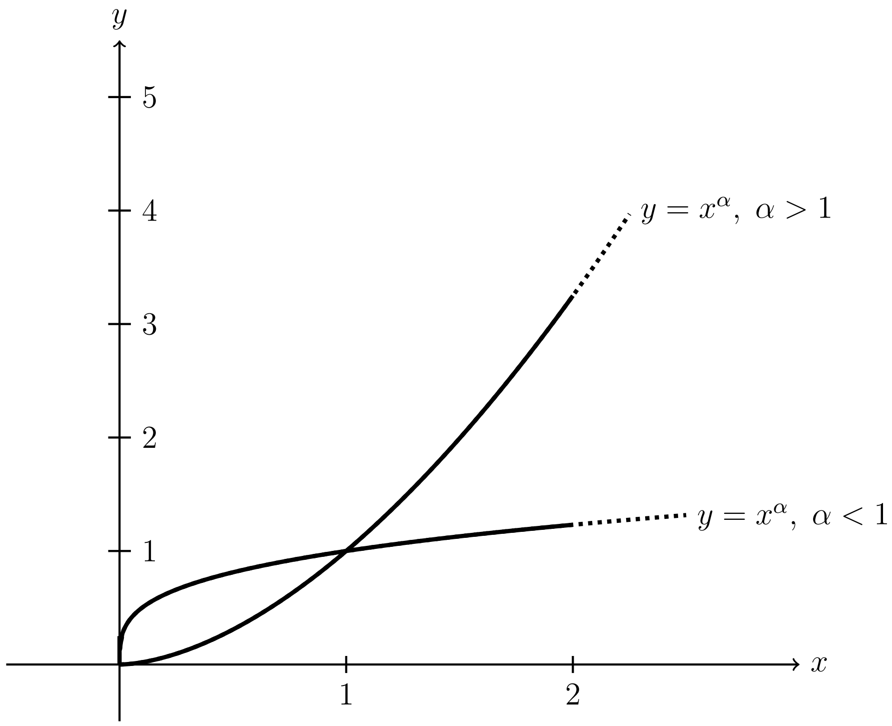
$$x^\alpha x^\beta = \exp(\alpha \ln x)\exp(\beta \ln x) = \exp(\alpha \ln x + \beta \ln x) = \exp((\alpha + \beta)\ln x) = x^{\alpha+\beta}, \quad x > 0.$$

Övriga regler kan visas på liknande sätt. Specifikt kan poängteras att

$$(e^\alpha)^\beta = \exp\left(\beta \ln e^\alpha\right) = \exp(\alpha\beta) = e^{\alpha\beta},$$

så kravet att $\beta \in \mathbf{Z}$ är inte längre nödvändigt med definitionen ovan, utan likheten gäller för alla $\beta \in \mathbf{R}$.

Notera beteendet för x^α för $\alpha > 1$ och $\alpha < 1$.



Exempel

Finn alla reella x så att $4^{x+1} - 2^{x+2} = 2^3$.

Lösning. Vi skriver om ekvationen för att se om vi kan finna en lämplig variabel:

$$4^{x+1} - 2^{x+2} = 4 \cdot 4^x - 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 4t^2 - 4t,$$

där $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och ekvationen kan alltså skrivas

$$4t^2 - 4t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-2) = 0.$$

Här ser vi att $t = -1$ inte går (då $2^x = -1$ saknar lösning) och att $t = 2$ medför att $2^x = 2$, så $x = 1$.
Svar: $x = 1$.

6.4 En bonus-invers

Låt oss betrakta ett lite mer komplicerat exempel.

Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{\ln(4-x) - \ln(2+x)}$. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) ett uttryck för inversen.

Lösning. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $4-x>0$, $2+x>0$, samt att

$$\ln(4-x)-\ln(2+x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(4-x)\geq \ln(2+x) \quad \Leftrightarrow \quad 4-x\geq 2+x \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 1$$

eftersom ln är strängt växande. Således blir $D_f =]-2,\, 1]$.
Låt $x\in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y=\sqrt{\ln(4-x)-\ln(2+x)} \quad &\Rightarrow \quad y^2=\ln(4-x)-\ln(2+x)=\ln\left(\frac{4-x}{2+x}\right) \\ &\Rightarrow \quad e^{y^2}=\frac{4-x}{2+x} \quad \Rightarrow \quad (2+x)e^{y^2}=4-x \\ &\Rightarrow \quad xe^{y^2}+x=4-2e^{y^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4-2e^{y^2}}{1+e^{y^2}}. \end{aligned}$$

Eftersom vi bara har ett alternativ ges ett uttryck för inversen av

$$f^{-1}(y)=\frac{4-2e^{y^2}}{1+e^{y^2}}.$$

Svar: $D_f =]-2,\, 1]$, $f^{-1}(y)=\dfrac{4-2e^{y^2}}{1+e^{y^2}}$.

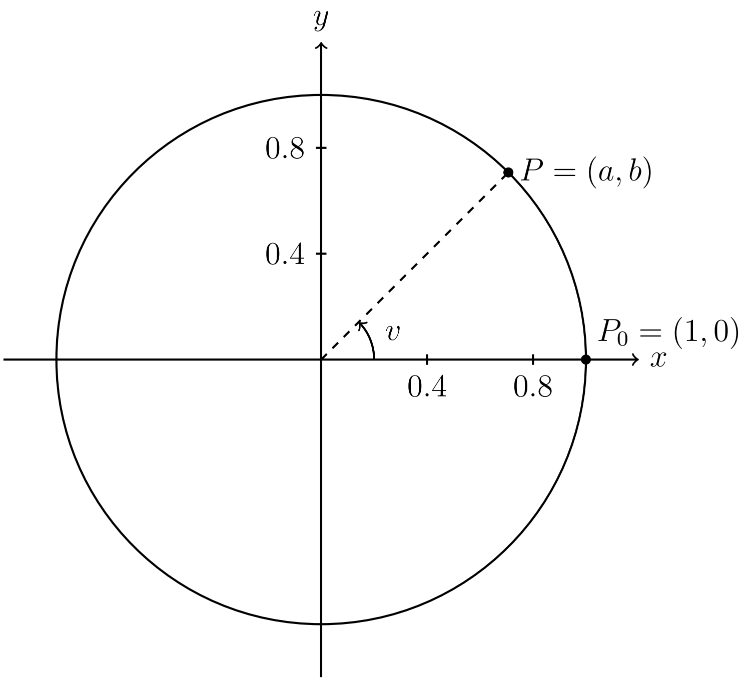
Kapitel 7

Trigonometri

7.1 Enhetscirkeln

Definition. Enhetscirkeln är cirkeln med centrum i origo och radie ett.

En punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln uppfyller alltså $a^2 + b^2 = 1$.



Vinkel

Definition. Vinkeln v definieras som båglängden från P_0 till P i positiv led (moturs).

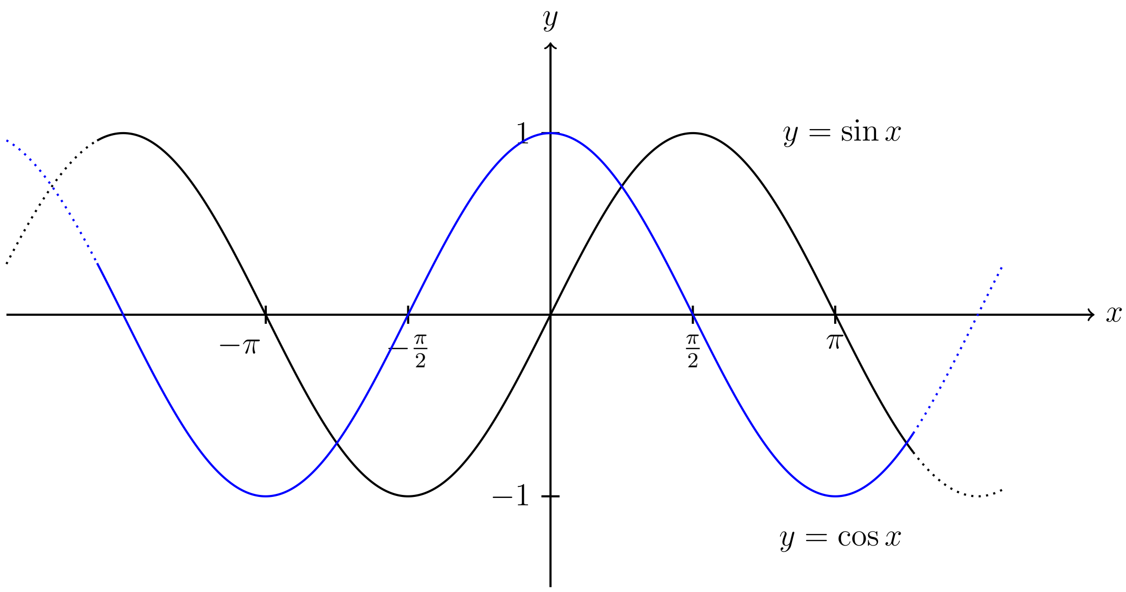
Det följer alltså att ett varv motsvaras av vinkeln 2π (cirkelns omkrets).

Sinus och cosinus

Definition. Vi definierar funktionerna sin och cos genom

$$\sin v = b \qquad \text{och} \qquad \cos v = a.$$

Det är naturligt att tänka sig $\cos v$ och $\sin v$ i termer av punkter på enhetscirkeln (eftersom punkten $(\cos v, \sin v)$ enligt definition alltid är en punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$), men det går även att betrakta funktionerna som en vanliga funktionsgrafer.



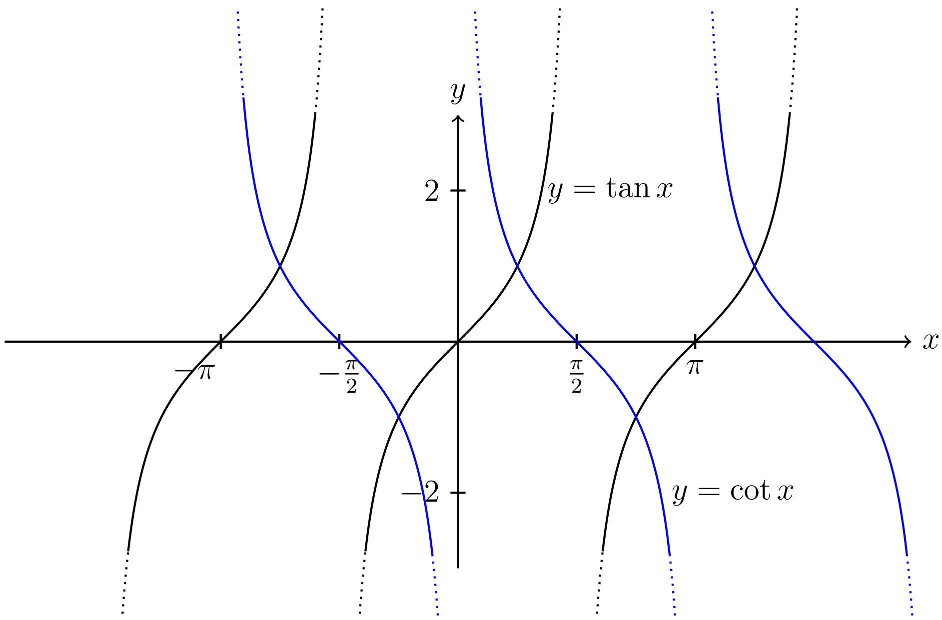
Definition. Funktionerna tan och cot definierar vi genom

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \quad \text{då } v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}$$

och

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}, \quad \text{då } v \neq n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}.$$

Tangens är lite svårare att direkt visualisera i enhetscirkeln (se boken för en variant). Vanligare kanske är att betrakta dessa funktioners grafer. Notera speciellt vad som händer vid punkter av typen $x = (n + 1/2)\pi$ för $\tan x$ och $x = n\pi$ för $\cot x$ (med $n \in \mathbf{Z}$).



Följder från dessa definitioner (sådant vi kan se ur enhetscirkeln).

(i) Trigonometriska ettan: $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$;

(ii) $\sin(v + 2\pi n) = \sin v$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos v$ för $n \in \mathbf{Z}$;

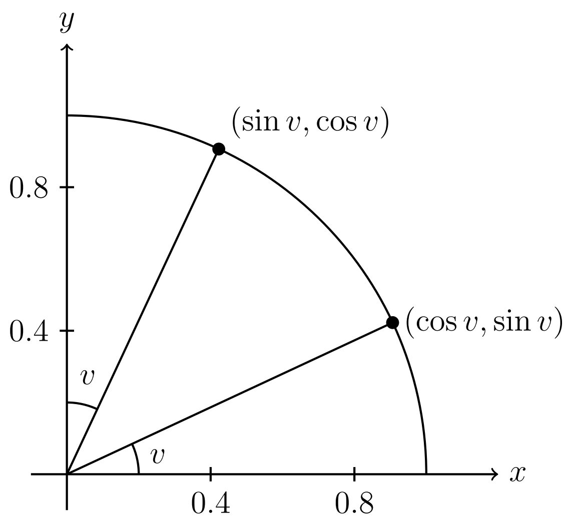
(iii) $\sin(v + \pi) = -\sin v$, $\cos(v + \pi) = -\cos v$, $\tan(v + \pi) = \tan v$ och $\cot(v + \pi) = \cot v$;

(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$ och $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$;

(v) $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$;

(vi) $\cos(\pi - v) = -\cos v$ och $\sin(\pi - v) = \sin v$.

Till exempel punkt (iv) kan vi se ur följande figur.



Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Parenteser?

Som vi redan sett skriver vi ibland $\sin v$ och ibland $\sin(v)$. Tanken är att om det inte råder någon tvetydighet om vad som är argumentet till funktionen så skriver vi inte ut parentesen Uttrycket $\sin \pi/3$ är tydligt medan $\sin \pi/3 + \pi/2$ inte är lika klart. Om det inte är självklart vad uttrycket betyder, skriv ut parenteser! Men gör det inte i onödan för då blir uttrycken svårlästa.

7.2 Trigonometriska ekvationer

Följande samband kan ses direkt ur enhetscirkeln:

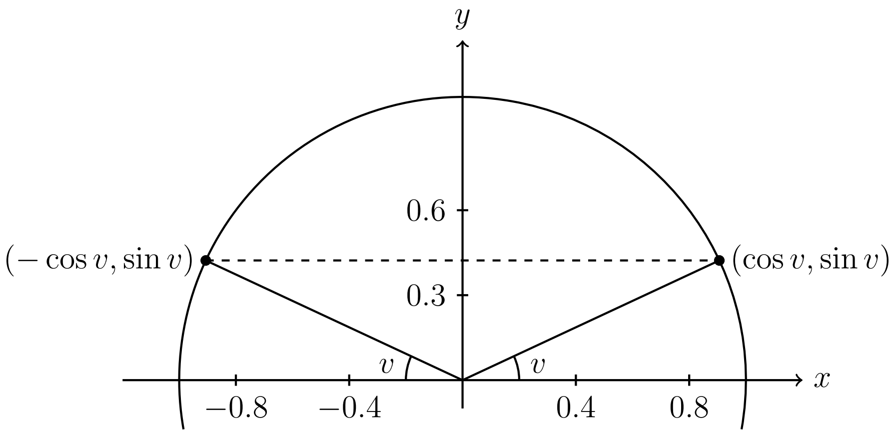
(i) $\sin u = \sin v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + 2\pi n$ eller $u = \pi - v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\cos u = \cos v \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(iii) $\tan u = \tan v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$;

(iv) $\cot u = \cot v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

Till exempel (i) kan illustreras med följande figur.



Det finns alltså två ”sätt” att få ett visst värde på sinus, den ”naturliga” vinkeln v men även $\pi - v$. Sen kan vi så klart snurra runt hur många varv vi vill för att hitta andra vinklar, men dessa två är principlösningarna.

Exempel

Finn alla $x \in \mathbf{R}$ så att $\sin 2x = \cos 3x$.

Lösning. Om vi hade haft samma trig-funktion på båda sidorna i likheten så hade vi kunnat använda sambanden ovan direkt. Kan vi komma dit? Visst går det, på flera olika sätt. En variant är att utnyttja att $\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ och därmed att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos 3x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \text{ eller } 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n. \end{aligned}$$

Fall 1:

$$2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$$

Fall 2:

$$2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n. \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n.$$

Här finns flera saker att kommentera. Variabeln n antar alla heltal $\mathbf{Z}$ (alltså $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), så om vi har $+2\pi n$ eller $-2\pi n$ spelar egentligen ingen roll, så den sista likheten kan lika gärna skrivas

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Svar: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$ och $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ där $n \in \mathbf{Z}$.

Sen kan det visa sig att vissa vinklar förekommer både i fall 1 och fall 2, så vill man snygga till svaret så måste det undersökas. I vårt fall ser vi att för att få $-\pi/2$ i fall 1 måste

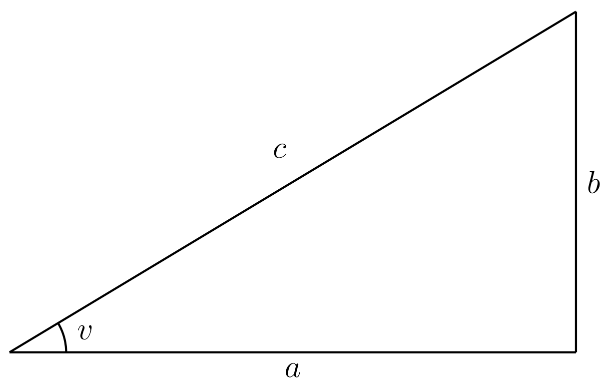
$$\frac{1 + 4n}{10} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 4n = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2n = -3,$$

vilket betyder att vi aldrig får med $-\pi/2$ i den första lösningsskaran eftersom $n = -3/2$ inte är ett heltal.

Notera även att vi alternativt hade kunnat byta ut $\sin 2x$ mot $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ i början av lösningen (vad ändras?).

7.3 Trigonometriska funktionsvärden

För vissa standardvinklar förväntas vi kunna sinus, cosinus etc av mer eller mindre utantill. Vilka? Vi betraktar fallet då vinkeln ligger i intervallet $]0, \pi/2[$. I detta fall kan vi använda trianglar för att reda ut vissa vinklar. Låt oss undersöka en rätvinklig triangel.



Här är

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

och

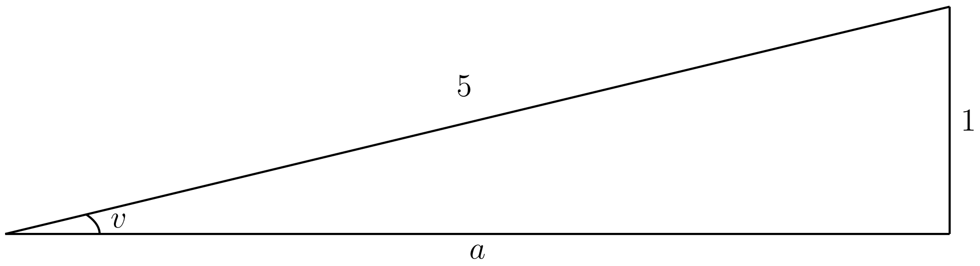
$$\begin{aligned} \sin v &= \frac{b}{c}, \quad & \cos v &= \frac{a}{c}, \\ \tan v &= \frac{b}{a}, \quad & \cot v &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Alltså kan vi använda en sådan triangel och via Pythagoras räkna ut till exempel $\sin v$ om vi känner $\cos v$. Hur då?

Exempel

Om $\sin x = 1/5$ och $0 < x < \pi/2$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Eftersom x ligger mellan 0 och $\pi/2$ så kan vi använda en hjälptriangel.



Pythagoras medför att $a^2 = 5^2 - 1^2 = 24$, så $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (givet att $a > 0$). Alltså kan vi direkt säga att $\cos x = \dfrac{a}{c} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ och $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1/5}{2\sqrt{6}/5} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Svar: $\cos x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ och $\tan x = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Exempel

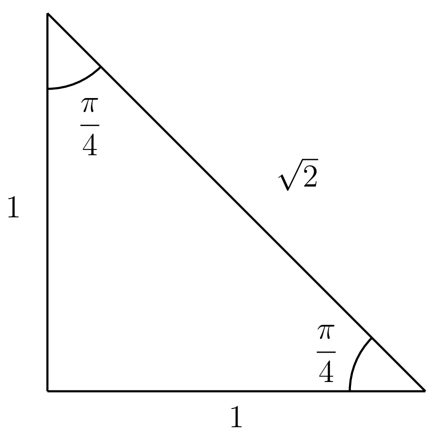
Om $\sin x = 1/5$ och $\pi/2 < x < \pi$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Är det samma svar som ovan? Observera att längderna i en hjälptriangel måste ha positiv storhet! Dvs att $a, b, c > 0$.

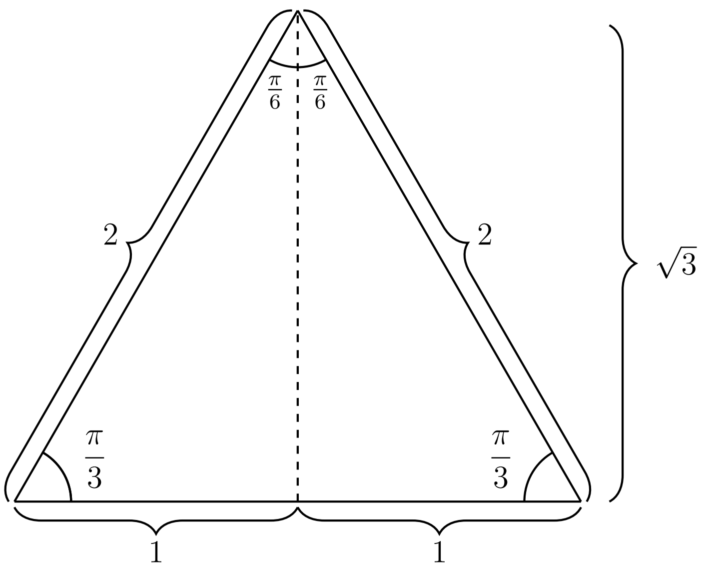
7.3.1 Standardvinklar

I en rätvinklig triangel med samma katetlängd (till exempel 1, men båda kateterna av längd 2 eller $\sqrt{731}$ går också bra) så är en vinkel (den räta) $\pi/2$ medan de andra två måste vara lika stora, så $\pi/4$.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Om vi istället konstruerar en likbent triangel där alla sidor är lika långa (till exempel 2) så måste alla ingående vinklar vara lika stora, dvs $\pi/3$. Om vi delar triangeln i två lika stora delar från ett hörn till mitten på motstående sida så uppstår två rätvinkliga trianglar enligt figuren nedan.



Ur denna triangel kan vi utläsa att

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Minnesregel

En minnesregel för att komma ihåg standardvinklarna kan sammanfattas i denna tabell.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(v)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

7.4 Additionsformlerna

Additionsformlerna

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

Det räcker att visa en av dessa likheter, resten följer av enkla trigonometriska samband vi redan känner till. Bevisen kan återfinnas i boken. Det finns ett par särskilt intressanta specialfall, till exempel formler för dubbla vinkeln:

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x \quad \text{och} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

och omvänt

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{och} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Dessa formler är mycket användbara när det gäller att lösa trigonometriska ekvationer och — som ni kommer att se — även när ni skall integrera vissa uttryck i envariabelanalysen! Tangens då? Jodå, via formlerna ovan kan vi ställa upp följande samband (visa det!).

Additionsformel för tangens

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \quad \text{och} \quad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}.$$

Exempel

Finn det exakta värdet för $\tan \frac{\pi}{12}$.

Lösning. Tricket här är att försöka dela upp vinkeln som en summa av kända standardvinklar. Således,

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

och därmed måste

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^2.$$

Exempel

Lös ekvationen $\cos 2x + 2\sin x - 2\sin x \cdot (1 - \cos 2x) = 1$.

Lösning. Exemplet kanske ser lite avskräckande ut, men vi försöker oss på att skriva om med lite trig-ekvationer och se om det trillar ut något enklare. Ett tips är att försöka se till att man bara har en ”sorts” trigonometrisk funktion i uttrycket. Vi vet att $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, så ekvationen är ekvivalent med

$$1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - 2\sin x \cdot (2\sin^2 x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0.$$

Om vi låter $t = \sin x$ (för att enklare se vad vi arbetar med) så ser vi att

$$4t^3 + 2t^2 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t(2t^2 + t - 1) = 0.$$

Så $t = 0$ är en lösning. Vi faktoriserar andragradaren:

$$2t^2 + t - 1 = 2(t^2 + t/2 - 1/2) = 2((t + 1/4)^2 - 9/16) = 2(t+1)(t - 1/2),$$

så de övriga lösningarna ges av $t = -1$ och $t = 1/2$. Vi har alltså tre olika fall.
Fall 1: Om $t = 0$ så är

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n\pi.$$

Fall 2: Om $t = -1$ så är

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Fall 3: Om $t = 1/2$ så är

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

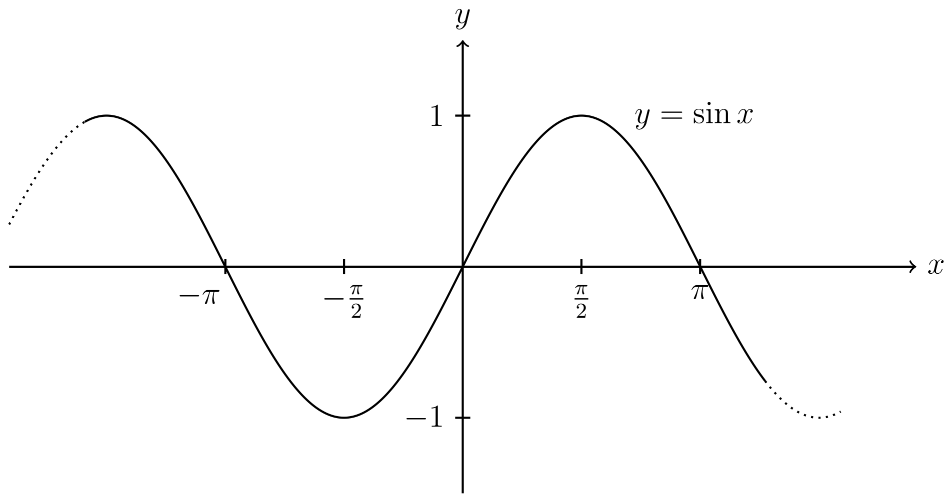
Svar: $x = n\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, där $n \in \mathbf{Z}$.
Vad hade hänt om $t = 2$ dök upp som lösning? Eller om $t = 1/3$?

Kapitel 8

Arcusfunktioner och hjälpvinkelmetoden

8.1 Inverser till trigonometriska funktioner

Om vi ritar upp funktionen $y = \sin x$ ser vi följande:



Självklart går det inte att hitta en invers till $\sin x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Det finns ju uppenbarligen oändligt många möjliga val för x för varje y mellan -1 och 1. Men om vi väljer ut en mindre definitionsmängd då?
Till exempel är $y = \sin x$ inverterbar då $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ eftersom sinus är strängt växande på det intervallet (se figuren, viss argumentation nödvändig för att visa det mer explicit). Ett algebraiskt bevis kan konstrueras med hjälp av additionsformlerna

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad \text{och} \quad \sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

eftersom det följer att

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v$$

så om $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$ är

$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2 \sin \underbrace{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{0 < \cdot < \pi/2} \cos \underbrace{\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}_{-\pi/2 < \cdot < \pi/2} > 0$$

ty $\sin(v) > 0$ om $0 < v < \pi/2$ och $\cos v > 0$ om $-\pi/2 < v < \pi/2$.

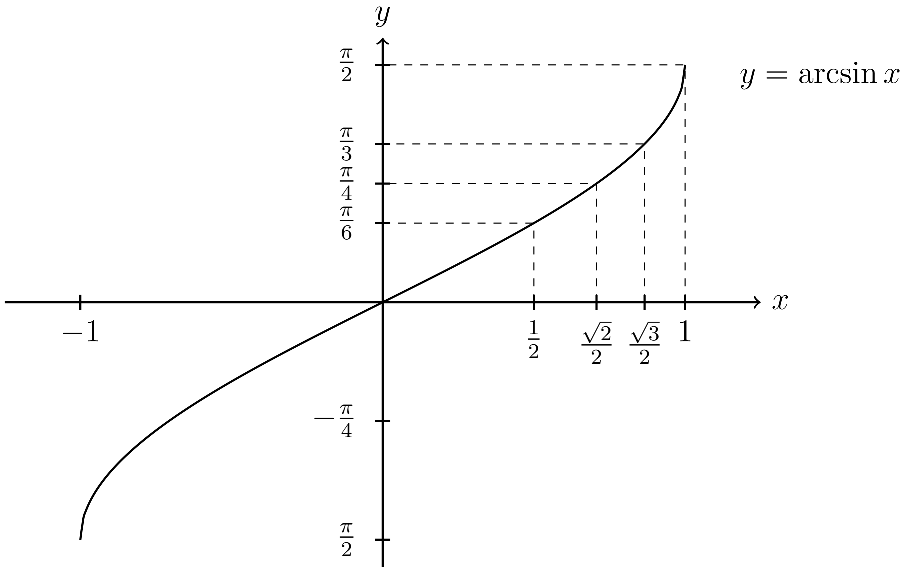
arcsin

Definition. $y = \arcsin x$ är det tal y så att $\sin y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arcsin}} = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Observera även följande:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, \qquad && -1 \le x \le 1, \\ \arcsin(\sin x) &= x, \qquad && -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Till exempel, om $x > \pi/2$ eller $x < -\pi/2$ gäller alltså inte $\arcsin(\sin x) = x$. Var försiktig med detta!



Exempel

Lös ekvationen $\sin x = \dfrac{2}{5}$ där $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lösning. Vi ser att $2/5$ inte kommer från någon standardvinkel vi känner igen, så **en** lösning till ekvationen $\sin x = 2/5$ ges av $x = \arcsin(2/5)$. Hur hittar vi alla lösningar? Precis som vi gjort tidigare! Vi vet att

$$\sin x = \frac{2}{5} = \sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi \text{ eller } x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi.$$

Detta är alltså samtliga lösningar. Vilka uppfyller kravet i formuleringen? Vi behöver ha en uppfattning om hur stor $\arcsin\left(\dfrac{2}{5}\right)$ är. Ur figuren ovan kan vi se att $0 < \arcsin\left(\dfrac{2}{5}\right) < \dfrac{\pi}{4}$ eftersom $0 < \dfrac{2}{5} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Fall 1. Om $x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \leq 0$ inte fungerar. Om $n = 1$ blir uttrycket för stort, så här hittar vi inga lösningar i rätt intervall.
Fall 2. Om $x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \neq 0$ gör x för stor respektive för liten. Men $n = 0$ fungerar, ty då måste $3\pi/4 < x < \pi$ vilket uppfyller villkoret i uppgiften.
Svar: $x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$.

Exempel

Förenkla $\arcsin\left(\sin\left(\frac{71\pi}{10}\right)\right)$.

Lösning. Vi ser att

$$\frac{71\pi}{10} = \frac{70\pi + \pi}{10} = 6\pi + \pi + \frac{\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{71\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi - \left(\pi + \frac{\pi}{10}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right),$$

så då $-\pi/2 < -\pi/10 < \pi/2$ följer det att

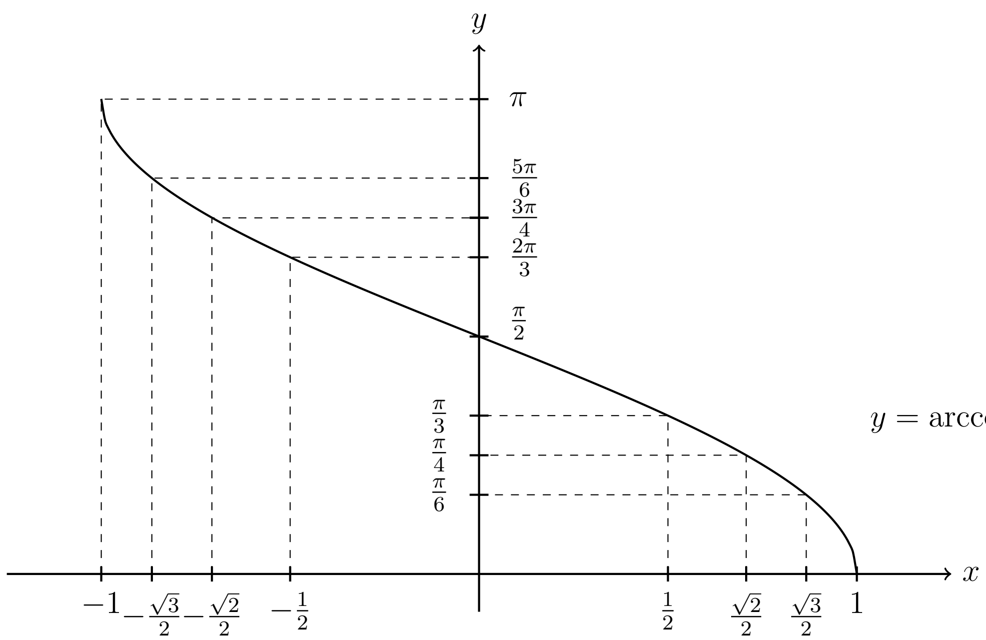
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{71\pi}{10}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

Svar: $-\frac{\pi}{10}$.

arccos

Definition. $y = \arccos x$ är det tal y så att $\cos y = x$ och $0 \leq y \leq \pi$.

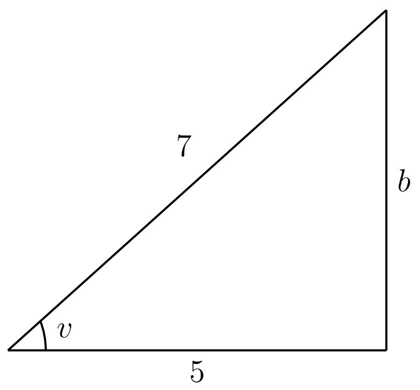
Vi noterar att $D_{\text{arccos}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arccos}} = [0, \pi]$.



Exempel

Förenkla $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right)$.

Lösning. Låt $v = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$. Eftersom $0 < 5/7 < 1$ så måste $0 < v < \frac{\pi}{2}$ (titta i figuren ovan!). Vi kan alltså använda en rätvinklig triangel.



Pythagoras implicerar att

$$b = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$$

och därmed erhåller vi att

$$\sin v = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Alternativ: vi kan använda trigonometriska ettan. Låt $v = \arccos\frac{5}{7}$. Då är

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\cos\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}.$$

Alltså är $\sin v = \pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$. Plus eller minus? Eftersom $0 < v < \pi/2$ så måste sinus vara positiv (titta i enhetscirkeln!).

Svar: $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Ett lite krångligare exempel? Visst! Detta är en gammal duggauppgift (där det dök upp ganska många kreativa svar).

Exempel

Förenkla $\frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)}$.

Lösning. Vi börjar med nämnaren:

$$v_1 = \arccos(\cos 7) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos v_1 = \cos 7, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v_1 = \pm 7 + 2\pi n, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad v_1 = 7 - 2\pi.$$

På samma sätt kan täljaren skrivas

$$v_2 = \arcsin(\sin 3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \sin v_2 = \sin 3, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} v_2 = 3 + 2\pi n \text{ eller } v_2 = \pi - 3 + 2\pi n, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med att $v_2 = \pi - 3$. Följaktligen får vi

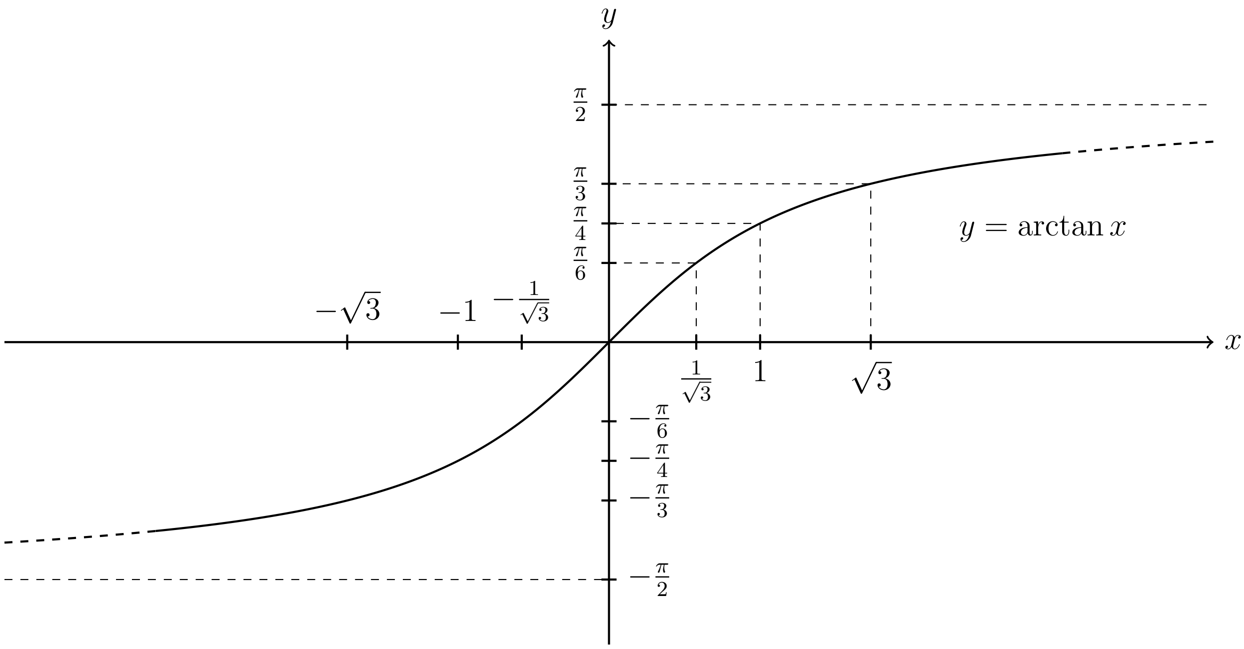
$$\frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)} = \frac{\pi - 3}{7 - 2\pi}.$$

Svar: $\dfrac{\pi - 3}{7 - 2\pi}$.

arctan

Definition. $y = \arctan x$ är det tal y så att $\tan y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\text{arctan}} = \mathbf{R}$ och att $V_{\text{arctan}} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.



Exempel

Förenkla $\arctan(2) + \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Lösning. Låt $v = \arctan 2 + \arccos(-4/5)$. Eftersom

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

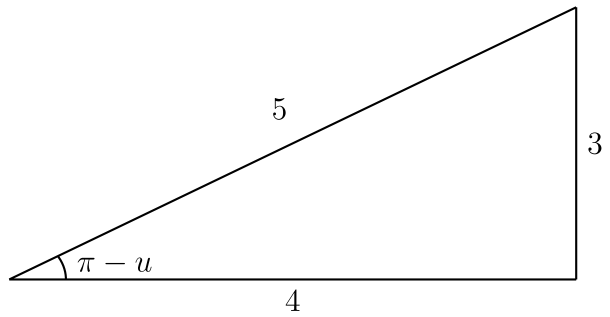
kan vi skriva

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arccos(-4/5))}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arccos(-4/5))}.$$

Vi ser att $\tan(\arctan 2) = 2$, men $\tan(\arccos(-4/5))$ är lite värre. Låt $u = \arccos(-4/5)$. Då är $\cos u = -4/5$ och $0 \leq u \leq \pi$. Minustecknet är lite obehagligt, så vi skriver

$$\cos u = -\frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi - u) = \frac{4}{5}.$$

En rätvinklig triangel med katetlängderna 4 och 3 ger att $\tan(\pi - u) = \dfrac{3}{4}$, så $\tan(u) = -\dfrac{3}{4}$ (vilket man kan se t ex från additionsformeln ovan). Försök absolut **inte** att rita en rätvinklig triangel där en vinkel är u. Eller försök förresten för all del. Vad händer?



Vi kan nu räkna ut $\tan v$:

$$\tan v = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 - 2(-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Alltså måste $v = \arctan(1/2) + n\pi$ för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\frac{1}{2} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{2\pi}{3} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) < \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \arccos(-1) = \pi.$$

Här har vi använt att arctan är växande, arccos är avtagande och kända standardvinklar. Alltså är

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < v < \pi + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom $0 < \arctan(1/2) < \pi/4$ så följer det att $n = 1$ är nödvändigt. Alltså blir den sökta vinkeln $v = \pi + \arctan(1/2)$. Med hjälp av en miniräknare eller dator kan man så klart enkelt få fram närmevärden och genom det bestämma n.

Svar: $\pi + \arctan\dfrac{1}{2}$.

8.2 Fasvinkelomskrivning (hjälpvinkel-)

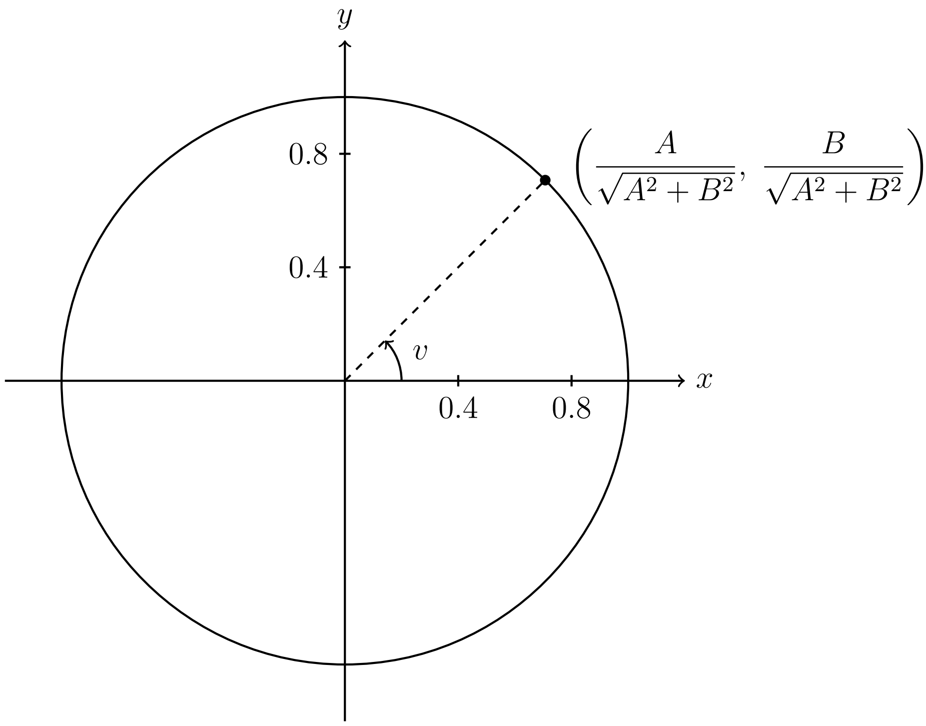
Summor (linjärkbominationer) av sinus och cosinus med samma frekvens kan skrivas som en enda term. Vi skriver om så att vi kan använda additionsformeln för sinus (går lika bra att göra motsvarande för cosinus om så önskas). Vi bryter ut så att koefficienterna framför $\sin x$ och $\cos x$ utgör koordinater för en punkt på enhetscirkeln:

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos v \sin x + \sin v \cos x) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+v), \end{aligned}$$

där v är **en** vinkel så att

$$\cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{och} \qquad \sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Det finns alltid oändligt många sådana val, men oftast räcker det för oss att hitta ett.



Vi introducerar också att $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ för att underlätta notationen. Så hur utför vi detta i praktiken? Normalt sett så utgår vi helt enkelt för additionsformeln för den trigfunktion vi ämnar använda. Låt oss betrakta ett exempel.

Exempel

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = \sqrt{6}$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning.
Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(2x + v)$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = C\left(\sin 2x \cos v + \cos 2x \sin v\right) = C\sin(2x + v).$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/4$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -3, \\ C\cos v &= \sqrt{3}. \end{cases}$$

I princip identifierar vi alltså bara koefficienterna framför $\cos 2x$ respektive $\sin 2x$. För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 12.$$

Alltså är $C = \sqrt{12}$ ett lämpligt **val**, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \\ \sin v &= -\frac{3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi **väljer** $v = -\pi/3$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{12}\sin(2x+v) = \sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x+v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+v = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \\ 2x+v = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{24} + n\pi \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{13\pi}{24} + n\pi$$

för $n \in \mathbf{Z}$.
Svar: $x = \dfrac{7\pi}{24} + n\pi$ eller $x = \dfrac{13\pi}{24} + n\pi$ för $n \in \mathbf{Z}$.

8.3 Udda och jämna funktioner

En sak som ni kanske reflekterat över när vi arbetat med trigonometriska funktioner är egenskaper som att $\cos(-x) = \cos(x)$ och $\sin(-x) = -\sin(x)$. Vi har sett att cos beter sig som en kvadratisk funktion (alltså $y = x^2$) och sin som $y = x$ i denna mening, när vi endast betraktar tecken. Funktioner som beter sig på detta sätt har en hel del trevliga egenskaper så låt oss göra en definition.

Udda och jämn funktion

Definition. En funktion f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$. En funktion f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$.

Exempel

(i) Funktionerna 1, $4 + x^2$, $\cos x$, $\ldots$, är jämna.

(ii) Funktionerna x, x^3, $\sin x$, $1/x$, $\ldots$, är udda.

Observera att en funktion f varken behöver vara udda eller jämn. De flesta funktioner är varken eller. Till exempel $f(x) = 1 + x + x^2$. Rita figur! Däremot går det alltid att dela upp en funktion i en summa av en udda och en jämn funktion:

$$f(x) = f_u(x) + f_j(x),$$

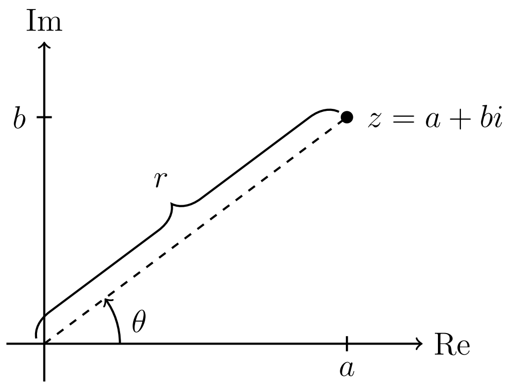
där till exempel $f_u(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ och $f_j(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$. Ibland kan det vara mycket användbart att bryta ned en funktion på detta sätt.
Notera även att en jämn funktion inte kan vara injektiv om både x och $-x$ tillhör definitionsmängden för något $x \neq 0$.

Kapitel 9

Komplexa exponentialfunktionen och binomiska ekvationer

9.1 Komplexa tal på polär form

Ett komplex tal $z = a + bi$ kan som bekant betraktas som en punkt i komplexa talplanet med två koordinater (a, b). En annan variant för att beskriva z är att istället ange ett avstånd r till origo och en vinkel; vi kallar detta för polär form.



Lite geometri visar att

$$a = r\cos\theta \qquad \text{och} \qquad b = r\sin\theta,$$

så

$$z = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Som bekant är $r = |z|$, men hur uttrycker vi θ?

Definition. Argumentet $\arg z$ för ett komplext tal z definieras som alla vinklar φ så att

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Observera att $\arg z$ är en flervärd funktion! Lite bökigt att hantera ordentligt alltså. När vi säger ”argumentet för z” menar vi oftast *något* värde på φ så att $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

9.1.1 Den komplexa exponentialfunktionen

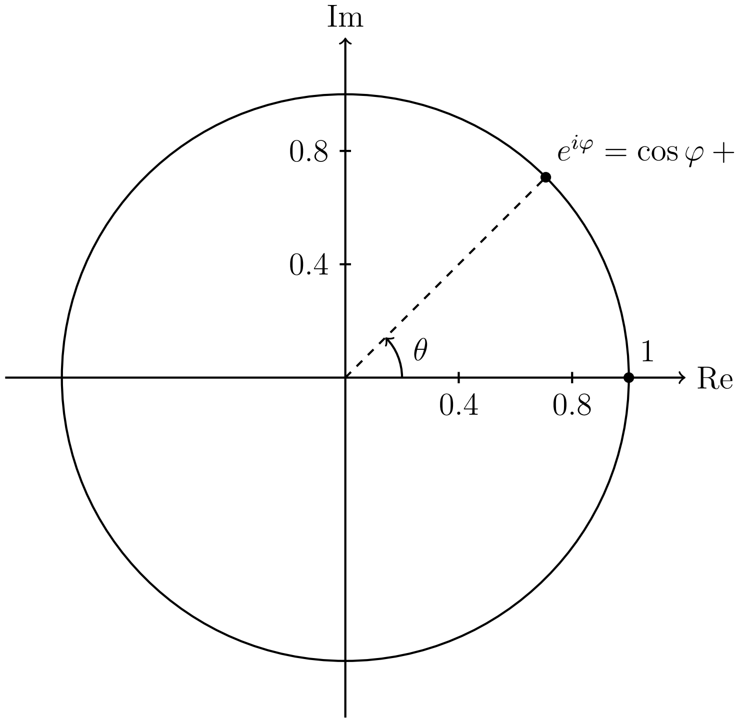
Tidigare har vi betraktat funktion exp för reella argument. Kan vi utvidga definitionen till komplexa tal? Följande definition visar att detta är möjligt.

Definition. För alla $\varphi \in \mathbf{R}$ så definierar vi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Vi observerar att $e^{i\varphi}$ är ett tal på enhetscirkeln ty

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

enligt trigonometriska ettan. Vi kan alltså betrakta $e^{i\varphi}$ som en punkt på cirkeln $|z| = 1$:



Det visar sig att de flesta ”regler” som gäller för den vanliga exponentialfunktionen fortfarande är sanna. Märk dock att olikheter som involverar komplexa storheter oftast är nonsens (varför?).

(i) $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

(ii) $e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$;

(iii) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ för $n \in \mathbf{Z}$ (obs **endast heltal**);

Punkt (iii) kallas de Moivres formel. Dessa likheter visas helt enkelt genom att använda definitionen av $e^{i\varphi}$. Vi kikar närmare på (i):

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$
$$= \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$$

ty $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ och $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.

Exempel

Skriv talet $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^5$ på polär form.

Lösning. Det komplexa talet $\sqrt{3} - i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3} - i = \sqrt{3+1}e^{-i\pi/6} = 2e^{-i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/6+i\pi/4}\right)^5 = 2^{5/2}e^{5\pi/12}.$$

Exempel

Använd den komplexa exponentialfunktionen för att visa additionsformlerna för sinus och cosinus.

Lösning. Detta är ett ganska elegant sätt att ta fram additionsformlerna på. Vi betraktar följande samband mellan reella u och v:

$$e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v)$$
$$= \cos u\cos v - \sin u\sin v + i(\sin u\cos v + \cos u\sin v).$$

Eftersom $e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v)$ måste då

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v$$

och

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$$

eftersom realdelen och imaginärdelen måste stämma överens. Observera dock att argumentet blir cirkulärt om man visat punkt (ii) ovan med hjälp av additionsformlerna.
Ibland kan det underlätta att betrakta en så kallad ”komplex form” av ett uttryck. Om vi har något som innehåller $\sin x$ eller $\cos x$ kan ju dessa betraktas som imaginär- eller realdel av e^{ix}. Vi visar med ett exempel.

Exempel

$$\begin{aligned}\sin 3x = \operatorname{Im}\left(e^{i3x}\right) &= \operatorname{Im}\left((e^{ix})^3\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + i\sin x)^3\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x\right)\\ &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

9.1.2 Eulers formler

Om vi löser ut $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ ur de ekvationer vi får från definitionen av $e^{i\varphi}$ och $e^{-i\varphi}$ så ser vi att

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}, \\ 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

Vi skriver ofta sambanden som

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \text{och} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dessa brukar kallas för Eulers formler och är mycket användbara. Bara med hjälp av trigonometriska ettan och Eulers formler kan man ofta härleda de flesta trigonometriska samband vi stöter på, även om det inte alltid blir så enkla kalkyler.

Exempel

Undersök vilka x som uppfyller $4\sin 2x\sin 4x - 8\sin x\sin 2x\cos 3x = 1$ genom att skriva om vänsterledet som en summa av sin / cos-termer och lösa ekvationen som uppstår.

Lösning. Vi använder Eulers formler och finner att

$$\begin{aligned}\sin x\sin 2x\cos 3x &= \frac{1}{-8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{-8}\left(e^{6ix} + 2 + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(1 + \cos 6x - \cos 2x - \cos 4x\right)\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\sin 2x\sin 4x &= \frac{1}{-4}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos 2x\right).\end{aligned}$$

Med dessa samband kan vi skriva om ekvationen i fråga enligt

$$-2\cos 6x + 2\cos 2x + 2 + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 2\cos 4x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 4x = \frac{1}{2},$$

så $4x = \pm\pi/3 + 2\pi n \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\pi/12 + \pi n/2$, där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

9.2 Binomiska ekvationer

Uttrycket binom innebär ett polynom med två termer (där den ena termen oftast är en konstant), så vi betraktar uttryck av typen $z^n - w$, där $z, w \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, samt w och n är kända storheter. Hur löser vi ut z ur en ekvation av typen $z^n = w$? Tanken är att vi arbetar med det hela på polär form, så:

(i) Skriv z och w på polär form: $z = re^{i\varphi}$ och $w = \rho e^{i\theta}$. Här kommer ρ och θ att vara kända, ρ och $r \geq 0$, samt $\varphi, \theta \in \mathbf{R}$.

(ii) Eftersom $z = re^{i\varphi}$ så är $z^n = r^n e^{in\varphi}$ och vi försöker alltså lösa ekvationen $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$.

(iii) Isolera absolutbeloppet och argumentet i ekvationen. Vi löser

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Absolutbeloppet:

$$|r^n e^{in\varphi}| = |\rho e^{i\theta}| \quad \Leftrightarrow \quad r^n = \rho \quad \Leftrightarrow \quad r = \rho^{1/n},$$

där vi endast har en lösning (den positiva) $r = \rho^{1/n}$ ty $\rho \geq 0$.

Argumentet:

$$\arg(r^n e^{in\varphi}) = \arg(\rho e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad n\varphi = \theta + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

där vi erhåller flera möjligheter eftersom $\arg z$ är en flervärd funktion.

(iv) Lista upp vilka lösningar vi erhåller. Observera att det räcker med n stycken eftersom det bara finns n rötter till ekvationen! Vilka? Bara vi tar en följd med n värden, till exempel $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, så får vi med allt. Skissa in lösningarna i en cirkel. När vi tagit n stycken i följd kommer vi tillbaka till den punkten vi startade i.

Exempel

Finn alla komplexa lösningar till $z^6 + 729 = 0$.
Ange eventuella lösningar på formen $z = a + ib$, a, $b \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi börjar med att skriva -729 på polär form:

$$-729 = 729e^{i\pi} = 3^6 e^{i\pi}.$$

Låt $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$. Då måste $z^6 = r^6 e^{6i\varphi} = 3^6 e^{i\pi}$, så

$$z^6 = -729 \quad \Leftrightarrow \quad r^6 e^{i6\theta} = 3^6 e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^6 = 3^6, \ r \geq 0, \\ 6\theta = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

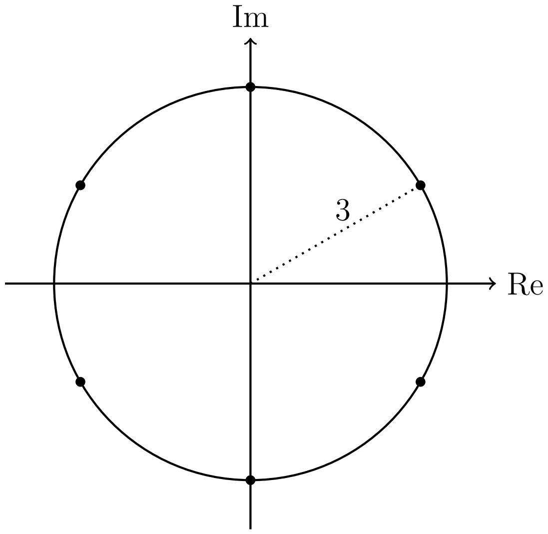
Alltså är $r^6 = 3^6$ och $6\varphi = \pi + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 3$ och att $\varphi = \pi/6 + n\pi/3$. Våra lösningar blir nu

$$z = 3e^{i(\pi/6 + n\pi/3)} = 3e^{i(1+2n)\pi/6}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 6$ får vi samma komplexa tal som när $n = 0$). Observera dock att för ekvivalensen ovan **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig. Om vi förenklar dessa får vi lösningarna

$$z = \pm 3i, \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Svar: $z = \pm 3i,\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i),\ \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.
Lösningarna ligger **alltid** jämnt fördelade på en cirkel i komplexa talplanet.



Ibland finns det inget ”trevligt” sätt att skriva lösningarna på rektangulär form (dvs $a + bi$). Skriv då inte ut med cos och sin utan lämna istället lösningarna på polär form. Det är enklare att läsa.

Uttryck i stil med $w^{1/n}$ (med $\operatorname{Im} w \neq 0$) har ingen mening i denna kurs. Om $n = 2$ till exempel skulle det innebära att vi tar roten ur ett komplex tal. Hur skulle det definieras? Vi lämnar sådana övningar till en kurs i komplex analys.

Exempel

Lös ekvationen $z^2 = i$.

Lösning. Låt $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Eftersom $i = e^{i\pi/2}$ så gäller att

$$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad r^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = 1,\ r \geq 0, \\ 2\theta = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Alltså är $r^2 = 1$ och $2\varphi = \pi/2 + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 1$ och att $\varphi = \pi/4 + n\pi$. Våra lösningar blir nu

$$z = e^{i(\pi/4 + n\pi)} = \pm e^{i\pi/4} = \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}.$$

Definition. Vi definierar $\exp(z)$ för $z \in \mathbf{C}$ enligt

$$\exp(z) = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

om $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Exempel

Lös ekvationen $e^z = 1 + 2i$.

Lösning. Låt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$e^z = 1 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad e^a e^{ib} = 1 + 2i.$$

Om vi tar beloppet av ekvationen erhåller vi

$$|e^a e^{ib}| = e^a = |1 + 2i| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad a = \ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln 5.$$

Om $e^a = \sqrt{5}$ måste

$$e^{ib} = \frac{1 + 2i}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos b = 1/\sqrt{5}, \\ \sin b = 2/\sqrt{5}. \end{cases} \tag{9.1}$$

Vi ser att

$$\cos b = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$

och då $\sin b > 0$ så ges samtliga lösningar till (9.1) av

$$b = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n.$$

Kontrollera gärna att $\sin b = 2/5$ som sig bör.
Svar: $z = \frac{1}{2} \ln 5 + i \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Det här är ett sätt vi skulle kunna introducera logaritmer av komplexa tal på. Observera att det dyker upp oändligt många möjligheter.

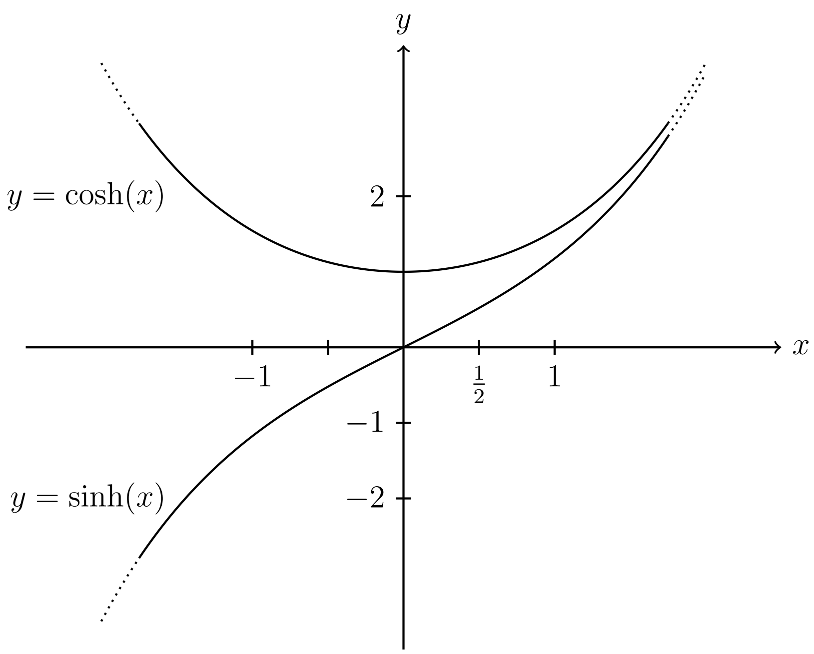
Kapitel 10

Hyperboliska funktioner och sammansatta övningar

Syftet med denna föreläsning är att introducera de hyperboliska funktionerna och att visa hur de olika momenten i kursen används för att lösa problem som kanske är lite mer omfattande än tidigare exempel. Det handlar alltså inte enbart om repetition även om det blir en del av effekten.

10.1 cosh (x) och sinh (x)

Definiera funktionerna $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ för $x \in \mathbf{R}$ (dessa kallas för de hyperboliska cosinus- och sinusfunktionerna).



Notera att *ingen* av dessa kurvor är hyperblar. Dessa objekt dyker upp på grund av följande likhet.

Exempel

Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (den hyperboliska ettan).

Lösning. Vi förenklar:

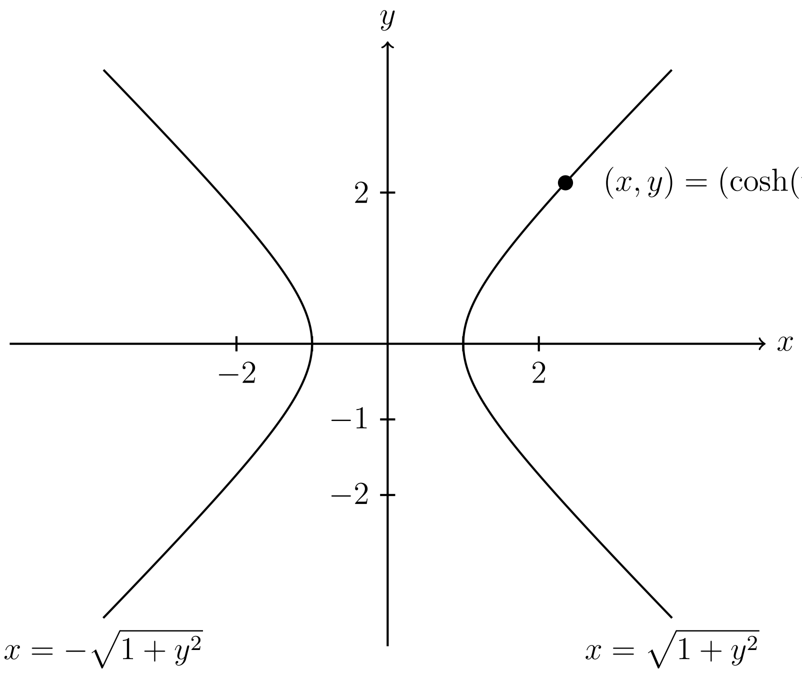
$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1,\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

En hyperbel är en kurva som uppfyller en ekvation av typen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

för reella konstanter a och b. Dessa hänger ihop med de hyperboliska funktionerna genom följande manöver. Låt $x = \cosh(t)$ och $y = \sinh(t)$ för $t \in \mathbf{R}$. Då kommer punkten (x, y) i planet att ligga på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ (så en hyperbel med $a = b = 1$).



Exempel

Undersök om $\cosh x$ och $\sinh x$ är inverterbara funktioner och ange om möjligt inverserna.

Lösning. Eftersom cosh är en jämn funktion saknar den en invers (med **R** som definitionsmängd). Att cosh är jämn kan enkelt ses ur definitionen då

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x.$$

Däremot verkar det möjligt att sinh är inverterbar, så vi försöker därmed att finna ett uttryck för en eventuell invers:

$$\begin{aligned} y = \sinh x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Det verkar nu finnas två möjligheter: $e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}$. Men, eftersom

$$\sqrt{1+y^2} > |y|$$

så blir högerledet negativt om vi väljer minus-lösningen. Detta är omöjligt eftersom vänsterledet alltid är positivt (varför?). Således måste

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Vi har alltså endast ett alternativ, och därmed har vi visat att $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Svar: $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Funktionen cosh saknar invers.

> **Exempel**
>
> Lös ekvationen $4\sinh x - 3\cosh x = 3$.

Lösning. Vi ser att

$$\begin{aligned} 4\sinh x - 3\cosh x = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(e^x - e^{-x}) - \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^x - \frac{7}{2}e^{-x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x - \frac{7}{2} = 0 \end{aligned}$$

Låt $t = e^x > 0$. För $t > 0$ så är

$$\frac{1}{2}t^2 - 3t - \frac{7}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 6t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \pm 4.$$

Alltså ges den enda lösningen av $x = \ln 7$ eftersom $t = -1 < 0$.

Svar: $x = \ln 7$.

10.2 Arcusar!

Exempel

Lös ekvationen $(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Lösning. Låt $x \in [-1, 1]$ och $v = \arcsin x$. Vi visar att $v = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Enligt definition vet vi att $\sin v = x$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Vidare,

$$x = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

och då $0 \leq \pi/2 - v \leq \pi$ måste $\pi/2 - v = \arccos x$. Med andra ord har vi visat att

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konjugatregeln medför nu att

$$(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = (\arccos x + \arcsin x)(\arccos x - \arcsin x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right).$$

Detta uttryck skall vara lika med $-\pi^2/12$, så

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right) = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10.3 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

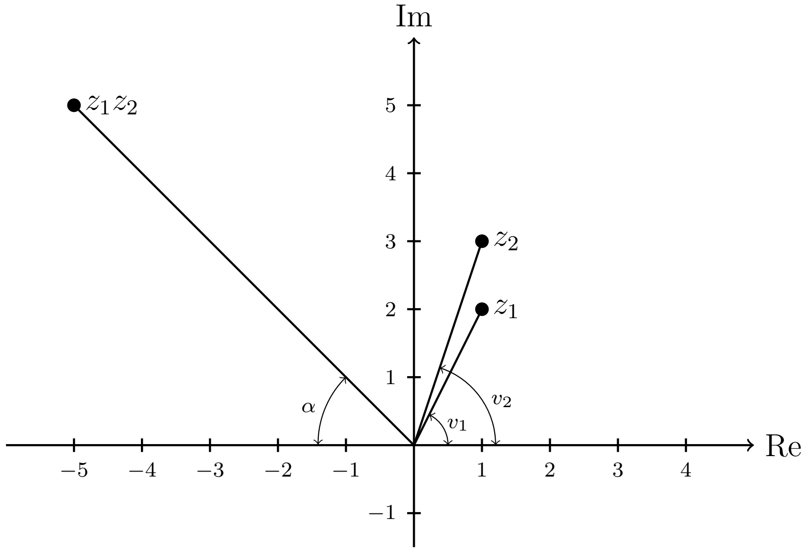
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa punkter ligger i första kvadranten. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i\arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{10.1}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan\alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan z_1z_2 och (positiva) real-axeln, där $z_1z_2 = \sqrt{50}e^{iv_3}$. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{10.2}$$

Ekvationerna (10.1) och (10.2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{10.3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är strängt växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (10.3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. **OBS: Ett svar!**

En favorit i repris? Varför inte.

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Lösning: Som i förra exemplet låter vi $z_1 = 1 + 2i$ och v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln så att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2.$$

En lösning till ekvationen ges av $\arctan 2$. När det gäller den andra vinkeln så observerar vi att

$$\begin{aligned}\exp\left(i\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) &= \cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\\ &= -\frac{4}{5} + i\sqrt{1 - \left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)^2}\\ &= -\frac{4}{5} + i\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5},\end{aligned}$$

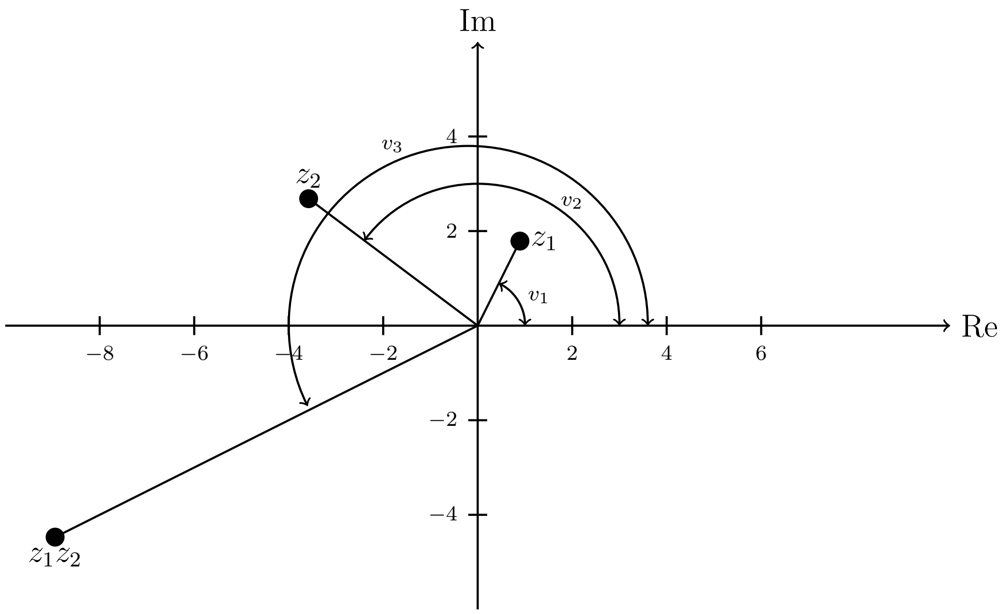
där det blir plus-tecken framför kvadratroten eftersom $\sin v_2 > 0$. Låt nu $z_2 = -4 + 3i$ (vi multiplicerar med 5 för att slippa bråken). På polär form kan vi nu skriva

$$z_1 = \sqrt{5}\exp\left(i\arctan 2\right) \qquad \text{och} \qquad z_2 = 5\exp\left(i\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right),$$

ser vi att $z_1 z_2 = 5\sqrt{5}\exp\left(i(\arctan 2 + \arccos(-4/5))\right)$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{10.4}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(-4 + 3i) = -10 - 5i$. Vi har följande illustration:



Alltså blir $v_3 = \pi + \arctan(1/2)$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln (i positiv led), där $z_1 z_2 = 5\sqrt{5}e^{iv_3}$. Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{10.5}$$

Ekvationerna (10.4) och (10.5) implicerar att

$$\arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{10.6}$$

för något heltal n. Vidare vet vi att

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \pi,$$

så

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \frac{3\pi}{2}.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (10.6).

Svar: $\pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

10.4 En trigonometrisk identitet

Exempel

För vilka x gäller att $2(1-\cos x)\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx + \sin x - \sin(n+1)x$ för alla positiva heltal n?

Lösning. Vi börjar med att försöka räkna ut summan. Via definitionen av e^{ix} kan vi skriva

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

Summan vi nu tar imaginärdelen av är en geometrisk summa med kvoten e^{ix}. Vi räknar ut denna:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = -1 + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}},$$

där vi har förlängt med konjugatet. Likheten gäller så länge $e^{ix} \neq 1$. Nämnaren kan skrivas om som $2 - 2\cos x$, och vi erhåller då

$$\operatorname{Im}\left(-1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}}\right) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x - \sin x}{2(1-\cos x)}.$$

Alltså måste

$$2(1-\cos x)\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx - \sin(n+1)x - \sin x$$

såvida inte $e^{ix} = 1$. Men detta händer precis då $x = 2k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$, och då är $\cos x = 1$ och alla sinus-termer i vänsterledet lika med noll. Likheten gäller alltså även då. Vi har nu visat att likheten gäller för alla $x \in \mathbf{R}$.

Svar: alla $x \in \mathbf{R}$.

10.5 Ett max/min-problem

Exempel

Avgör var $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x}{8}$ har sitt största respektive minsta värde och ange vad maximum och minimum blir.

Lösning. Först skriver vi om uttrycket lite för att få något enklare att arbeta med. Som bekant kan summor av sin och cos skrivas om med en hjälpvinkel om de har samma frekvens. Vi försöker med detta:

$$\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\right).$$

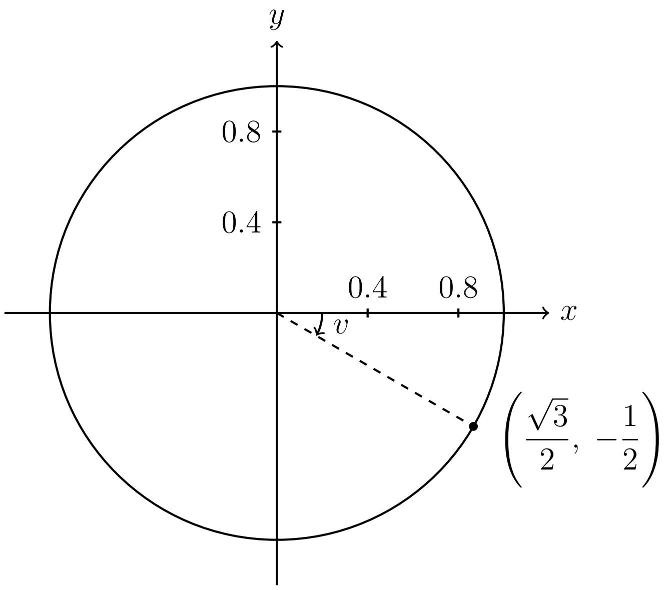
Vi bryter ut $C = 2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ för att garantera att vi kan hitta en lämplig punkt på enhetscirkeln.

Eftersom

$$C\sin(3x+v) = C\left(\sin 3x\cos v + \cos 3x \sin v\right)$$

så kan vi identifiera att

$$\begin{cases} \sin v &= -1/2, \\ \cos v &= \sqrt{3}/2. \end{cases} \tag{10.7}$$



I figuren till höger ser vi att den punkt som motsvarar v ligger i fjärde kvadranten. Dessutom ser vi att det rör sig om en standardvinkel. Samtliga vinklar som uppfyller (10.7) ges av $v = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Vi **väljer** $v = -\dfrac{\pi}{6}$.

Alltså har vi visat att $f(x) = \dfrac{1}{4}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Det är således klart att största värdet blir $1/4$ och minsta $-1/4$, vilket inträffar precis då

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in \mathbf{Z},$$

respektive

$$3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: Maximum blir $1/4$ då $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; Minimum blir $-1/4$ då $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Exempel

Med $f(x)$ från förra exemplet och D_f givet av $-\pi \le 9x \le 2\pi$, undersök om f har en invers f^{-1} och ange om möjligt ett uttryck för inversen.

Lösning. Vi försöker nu bestämma inversen:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad 4y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Rightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \arcsin 4y \text{ eller } \pi - \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi = \arcsin 4y \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Möjligheterna ges således av

$$x = \underbrace{\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\arcsin(4y)}_{\in\left[\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[-\frac{\pi}{9},\ \frac{2\pi}{9}\right]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{10.8}$$

eller

$$x = \underbrace{\frac{7\pi}{18} - \frac{1}{3}\arcsin(4y)}_{\in\left[\frac{7\pi}{18}-\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[\frac{2\pi}{9},\ \frac{5\pi}{9}\right]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{10.9}$$

Nu vet vi att $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{2\pi}{9}$ och då måste $x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\arcsin 4y$. Varför? Vi ser att endast $n = 0$ är möjlig i (10.8). I (10.9) hittar vi endast enstaka ändpunkter som hamnar rätt (om $n = 0$ eller $n = -1$). För övriga $n \in \mathbf{Z}$ blir det utanför sökt intervall. I de punkter som finns i båda fallen får vi samma värde på x.

Svar: $f^{-1}(y) = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\arcsin 4y$.

10.6 Det är roligt med inverser

Exempel

Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för $f^{-1}(x)$ om $f(x) = \dfrac{\pi + 4\arcsin x}{\pi - 4\arcsin x}$.

Lösning. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \left[-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} \quad &\Leftrightarrow \quad y\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right)$.

Sakregister