Föreläsning 3: Komplexa tal

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

16 augusti 2022

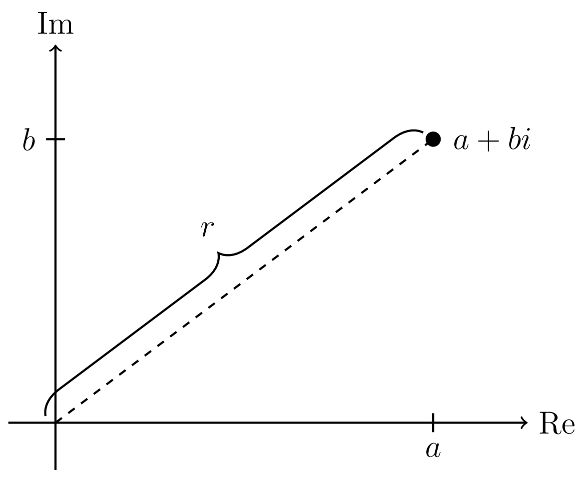
1 Komplexa tal

Definition. Det imaginära talet i uppfyller att $i^2 = -1$.

Detta är alltså ett tal vars kvadrat är negativ. Det kan således aldrig vara ett reellt tal utan är ett helt nytt slags objekt. Märk väl att vi inte någonstans skriver att "$\sqrt{-1} = i$". Detta av den enkla anledningen att vi endast definierat $\sqrt{x}$ för $x \geq 0$. Ett alternativ vore givetvis att utvidga definitionen av kvadratroten till att inkludera negativ tal (du kan säkert se den utvidgningen framför dig), men det objekt du då erhåller är inte den kvadratrot vi introducerat tidigare. Exempelvis så är det inte längre säkert att $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (fundera över vad som händer om både a och b är negativa). Du *kommer* att få poängavdrag i denna kurs om du skriver kvadratroten ur något negativt.

Vi inför nu de komplexa talen $z = a + bi$, där a och b är reella tal ($a, b \in \mathbf{R}$). Ett komplext tal har alltså två dimensioner: en reell koordinat a (kallas realdelen) och en *imaginär* koordinat b (kallas imaginärdelen). Vi kan representera det komplexa talplanet, vilket skrivs $\mathbf{C}$, som ett två-dimensionellt plan med en real-axel och en imaginär-axel.

Vi kan representera komplexa tal i det komplexa talplanet med figurer av denna typ.



Avståndet $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ har en naturlig tolkning och används som definition av det komplexa absolutbeloppet; vi återkommer till detta.

Komplexa tal uppfyller samma ”regler” som reella tal gör (addition, multiplikation etc) med den extra förutsättningen att $i^2 = -1$.

När vi ska räkna med komplexa tal gör vi alltså som vanligt, men vi kan hela tiden förenkla uttryck som innehåller i^2.

Exempel

$$(2-i)(1+4i) = 2+8i-i-4i^2 = 2+7i+4 = 6+7i.$$

Komplexa tal är en användbar konstruktion. I denna kurs och efterföljande analyskurs kommer vi att:

(i) Faktorisera polynom fullständigt i (komplexa) faktorer av grad 1.

(ii) Göra trigonometriska omskrivningar och förenklingar.

(iii) Beräkna integraler.

(iv) Lösa differentialekvationer.

Tillämpningar finns inom vitt skilda områden som exempelvis elkretsteori, reglerteknik, transformer, elektromagnetism etc.

Definition. Låt $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$. Då definierar vi följande begrepp:

(i) **Realdelen** $\operatorname{Re} z = a$;

(ii) **Imaginärdelen** $\operatorname{Im} z = b$ (observera att det inte är något i i imaginärdelen utan endast koefficienten före i i z);

(iii) **Absolutbeloppet** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(iv) **Konjugatet** $\overline{z} = a - bi$ (vi har bytt tecken på imaginärdelen).

Absolutbelopp

Observera att absolutbeloppet vi definierat ovan täcker en större klass tal än det vi såg på förra föreläsningen. Om $z = a + bi$ är reell så är $b = 0$, och då kan vi beräkna att $|z| = \sqrt{a^2 + 0}$. Vi vet enligt tidigare att $\sqrt{a^2} = |a|$, där detta belopp är det vi introducerade på föreläsning två. Den nya definitionen reduceras alltså till den gamla om vi endast betraktar reella tal.

En kuggfråga som blir fel ibland.

Komplext eller reellt belopp?

Bestäm $|3 - 4|$.

Felet som kan inträffa är att man slarvigt tänker sig att $3-4$ är ett komplext tal och bildar $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Detta är så klart helt galet; vi ser direkt att $3-4=-1$, så $|3-4| = |-1| = 1$.

1.1 Komplexa identiteter

Till exempel kan vi bevisa identiteten $|z|^2 = z\overline{z}$ genom att låta $z = a+bi$, där $a, b \in \mathbf{R}$, och se att

$$\mathrm{VL} = |z|^2 = |a+bi|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$$

samt

$$\mathrm{HL} = z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2+b^2,$$

så vänster- och högerled stämmer överens för alla $z \in \mathbf{C}$. Vi kan visa följande egenskaper på samma sätt (gör det som en övning!).

Direkta följder av definitionerna ovan inkluderar

(i) $|z|^2 = z\overline{z}$;

(ii) $|zw| = |z||w|$;

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

(iv) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Vad menar vi då med att två komplexa tal är lika (som potentiellt händer i punkt (iii) ovan)? Definitionen är ganska naturlig.

Likhet

Definition. Talen $z = a+bi$ och $w = c+di$ är lika om och endast om de har samma real- och imaginärdelar, dvs att

$$a = c \qquad \text{och} \qquad b = d.$$

Vi skriver då att $z = w$.

Vi använder oss av denna definition när vi löser ekvationer som involverar komplexa tal.

Exempel

Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ så att $3z - 2i\overline{z} - 5 + 10i = 0$.

Lösning. En variant för att lösa ekvationer som innehåller komplexa variabler är att ansätta att $z = a+bi$ och utnyttja definitionen ovan genom att undersöka realdelen och imaginärdelen för ekvationen som ett system av ekvationer med två obekanta. Denna metod är inte alltid den bästa. Det kan bli brutalt hemska kalkyler (om vi till exempel skulle ha $z^7 + \cdots$ eller dylikt), så finns det en annan metod brukar det vara den det är meningen att använda. Men i fall som denna ekvation blir det faktiskt enklast. Sålunda, låt $z = a+bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned} 3(a+bi) - 2i\overline{(a+bi)} - 5 + 10i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3a + 3bi - 2ai - 2i(-bi) - 5 + 10i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a - 2b + i(3b-2a) = 5 - 10i. \end{aligned}$$

Vi undersöker nu realdel och imaginärdel separat:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ -2a + 3b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Alltså ges den enda lösningen av $z = -1 - 4i$. Kontrollera detta!
Svar: $z = -1 - 4i$.

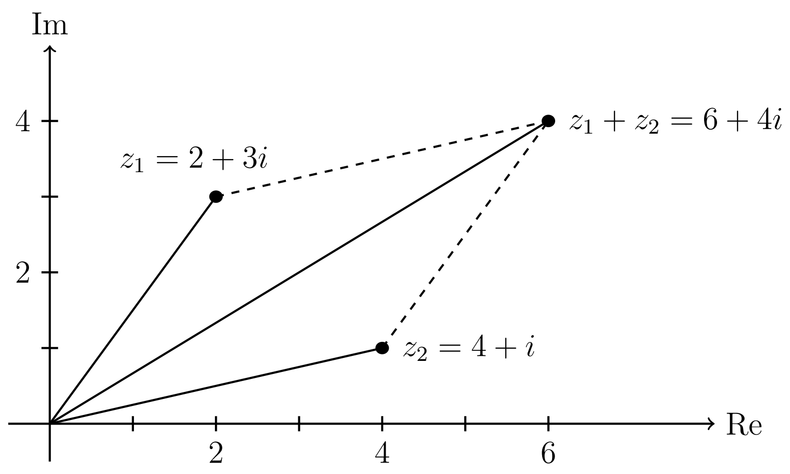
Definition. Om $z, w \in \mathbf{C}$ och $w \neq 0$ så definierar vi $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$.

Exempel

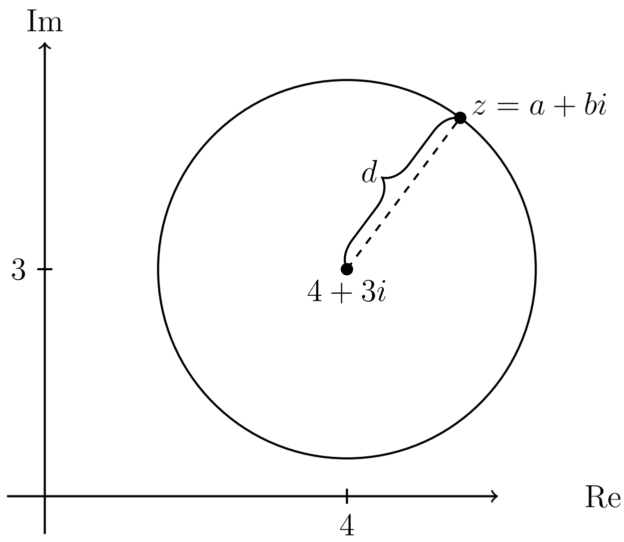
$$\frac{3-i}{2+3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{3-11i}{4+9} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i.$$

1.2 Geometriska tolkningar

Eftersom komplexa tal kan representeras som punkter i ett plan så kan vi ibland tolka operationer, olikheter och ekvationer geometriskt. Till att börja med kan addition av komplexa tal göras som vektoraddition.



Om $z, z_0 \in \mathbf{C}$ så kommer till exempel samband av typen $|z - z_0| = d$ och $|z - z_0| \leq d$ att representera en cirkel respektive en ifylld disk.



Hur kan vi se detta? Vi kan ansätta att $z = a + bi$ och $z_0 = a_0 + b_0 i$ där $a, b, a_0, b_0 \in \mathbf{R}$ och se vilken form uttrycken tar. Till exempel:

$$d^2 = |z - z_0|^2 = |a + bi - a_0 - b_0 i|^2 = |(a - a_0) + (b - b_0)i|^2 = (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2,$$

något vi känner igen som cirkelns ekvation!

1.3 Triangelolikheten

En mycket användbar olikhet (så användbar att man ofta kräver att mer abstrakta rum ska ha denna egenskap) är triangelolikheten.

Triangelolikheten

Om $z, w \in \mathbf{C}$ så gäller att $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Geometriskt är detta ganska klart. Uttrycken $|z|$ och $|w|$ kan tolkas som katetlängderna i en triangel där längden på hypotenusan ges av $|z + w|$. Försök rita en triangel där hypotenusan är längre än summan av kateternas längder! Det går även att visa rent algebraiskt. Tanken bygger på att visa $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Utveckla vänsterledet som $(z + w)\overline{(z + w)}$ och utnyttja att $\mathrm{Re}(zw) \leq |zw|$ (varför är detta sant?).

Exempel

Antag att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Visa att z ligger i en disk med centrum i punkten -4 och radie 12.

Vi börjar med att formulera det hela med belopp. Vi vet att $|z - 3i| \leq 7$ då detta är precis den olikhet som beskriver att z ligger i en disk med centrum i punkten $3i$ och radie 7. Sen vill vi undersöka $|z - (-4)|$:

$$|z + 4| = |(z - 3i) + (3i + 4)| \leq |z - 3i| + |3i + 4| \leq 7 + |3i + 4| = 7 + \sqrt{9 + 16} = 12.$$

Här har vi kreativt lagt till noll i form av $-3i + 3i$ för att på så sätt skapa $z - 3i$, som vi sedan kan uppskatta.

2 Polynomekvationer

Polynom

Definition. Ett polynom $p(z)$ är ett uttryck av typen

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är (möjligen komplexa) konstanter och n ett icke-negativt heltal. Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad n*.

Det är en liten skillnad i jämförelse med föreläsning 1: vi har ersatt variabeln x med variabeln z och tänker oss nu att konstanter i allmänhet är komplexa. Anledning att använda variabeln z är för att markera att vi kommer att arbeta med komplexa tal.

2.1 Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Exempel

Finn alla (reella och komplexa) lösningar till ekvationen $z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = 0$.

Lösning. Vi kvadratkompletterar för att få en enklare ekvation:

$$z^2 + 2(1+i)z - 3 - 2i = (z+1+i)^2 - (1+i)^2 - 3 - 2i = (z+1+i)^2 - 3 - 4i = 0.$$

Låt $w = z + 1 + i$ och skriv $w = a + bi$ där $a,\, b \in \mathbf{R}$. Vi löser

$$w^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 - 3 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ \quad\; 2ab = 4 \end{cases}$$

Alternativ 1. Vi söker w så att $w^2 = 3 + 4i$. Detta innebär då att $|w^2| = |3 + 4i| = \sqrt{25} = 5$. Nu vet vi att $w = a + bi$ är ett komplext tal, så $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$. Dessa två samband visar alltså att $a^2 + b^2 = 5$. Det följer då att $2a^2 = 8$, eller att $a = \pm 2$.
Alternativ 2. Vi ser att $a,\, b \neq 0$ och att $b = 2/a$. Då måste $a^2 - (2/a)^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; a^4 - 4 = 3a^2$ gälla (ekvivalens ty $a \neq 0$). Vi låter $t = a^2$ och ser att

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-4)(t+1) = 0.$$

Endast $t = 4 \;\Leftrightarrow a = \pm 2$ ger intressanta lösningar då $t = a^2 \geq 0$.

Om $a = 2$ så blir $b = 1$ och om $a = -2$ blir $b = -1$. Vi får alltså lösningarna $w_1 = 2 + i$ och $w_2 = -2 - i$, vilket i sin tur ger $z_1 = 1$ och $z_2 = -3 - 2i$.
Svar: $z = 1$ och $z = -3 - 2i$. (Genomför även en kontroll!)

2.2 Polynom av högre ordning

Faktorsatsen gäller fortfarande.

Faktorsatsen

Sats. Följande två påståenden är ekvivalenta.

(i) Polynomet $p(z)$ innehåller faktorn $z - z_0$, det vill säga $p(z) = (z - z_0)q(z)$ för något polynom $q(z)$.

(ii) $z = z_0$ är ett nollställe till $p(z)$, det vill säga att $p(z_0) = 0$.

Ett mycket viktigt resultat är algebrans fundamentalsats (och dess följdsats).

Algebrans fundamentalsats

Sats. Varje polynomekvation $p(z) = 0$ med grad $n \geq 1$ har minst en rot.

Ett korollarium till denna sats är att ett polynom $p(z)$ av grad n har precis n stycken rötter om vi räknar med multiplicitet (dvs en dubbelrot räknas som två rötter etc).

Exempel

Polynomet

$$p(z) = 4z^2(z-1)(z+\sqrt{2})(z+i)^3$$

har grad $n = 7$ (varför?) och har rötterna $z = 0$ (dubbelrot), $z = 1$, $z = -\sqrt{2}$, samt $z = -i$ (trippelrot).

För att bevisa algebrans fundamentalsats skulle vi behöva en del verktyg vi tyvärr inte har tillgång till. Det finns många varianter för ett bevis som bygger på allt från komplex analys (till exempel via maximumprincipen, via argumentprincipen eller som kanske är enklast via Liouvilles sats), abstrakt algebra (till exempel genom att visa att utvidgningen $\mathbf{R}[i]$ är algebraiskt sluten eller via Galoisteori) eller ren topologi (till exempel med kontinuerlig deformeration och vindningstal).

En trevlig egenskap för polynom med reella koefficienter är att det finns en användbar symmetri för komplexa rötter.

Komplexkonjugerade rotpar

Sats. Om ett polynom $p(z)$ har **reella koefficienter** (viktigt) och $z = a + bi$ är en rot så är även $z = a - bi$ en rot. Med andra ord,

$$p(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\overline{z_0}) = 0$$

då $p(z)$ har reella koefficienter.

Bevis. Låt $\alpha \in \mathbf{C}$ vara ett nollställe för $p(z)$, dvs $p(\alpha) = 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned}
p(\overline{\alpha}) &= a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_2(\overline{\alpha})^2 + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^n} + \cdots + a_2\overline{\alpha^2} + a_1\overline{\alpha} + a_0 \\
&= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^n + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} \\
&= \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0,
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $\overline{\alpha^k} = (\overline{\alpha})^k$, $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ samt att för $\beta \in \mathbf{R}$ så är $\overline{\beta z} = \beta \overline{z}$. Alltså är $\overline{\alpha}$ också ett nollställe för $p(z)$. $\square$

Ett allvarligt principfel som bör undvikas är att använda föregående sats när koefficienterna inte är reella. Med andra ord:

Reella koefficienter

Observera att denna sats endast gäller då $p(z)$ har reella koefficienter. Till exempel $p(z) = z^2 - iz$ har roten $z = i$, men $z = -i$ är ingen rot. Testa!

3 Gissning av nollställen vid heltalskoefficienter

Som utlovat kommer här en systematisk metod för att veta vilka rationella lösningar som är möjliga om vi har heltalskoefficienter i ett polynom.
Låt
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
vara ett polynom där koefficienterna $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ är heltal. Om $x = \dfrac{r}{q}$ är en rationell rot (r och q är heltal, r och q har inga gemensamma delare så p/q är fullt förenklad, och $q \neq 0$) så måste r vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n. Detta följer av att

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{r}{q}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \frac{r^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{r}{q} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a_n r^n = -q^n \left(a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{r}{q} + a_0 \right) \\
&\Leftrightarrow \quad a_n r^n = -q \left(a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

samt att

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{r}{q}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 = -r \left(a_n \frac{r^{n-1}}{q^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-2}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{q} \right) \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 q^n = -r \left(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

där r och q är relativt prima. Med andra ord, om $\dfrac{r}{q}$ är ett nollställe så är $a_0 = r \cdot k_1$ och $a_n = q \cdot k_2$ för några heltal k_1 och k_2. Hur använder vi detta i praktiken?

Exempel

Faktorisera polynomet $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ i reella faktorer.

Om $x = \dfrac{r}{q}$ är en rot till $p(x)$ så måste alltså r vara en faktor i siffran 3. Möjliga värden på r är $r = \pm 1, \pm 3$. Vidare, q måste vara en faktor i siffran 2. Möjliga värden på q är $q = \pm 1, \pm 2$. Från dessa möjligheter kan vi skapa alla möjliga kombinationer för $\dfrac{r}{q}$:

$$\frac{r}{q} = \pm 1, \ \pm 3, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm \frac{3}{2}.$$

Detta är alltså **alla** möjligheter för att ha en rationell rot. Enda heltalsrötterna som är möjliga är alltså ± 1 och ± 3, och testning visar att ingen av dessa är en rot. Skulle vi bara gissa på

måfå kan vi alltså hålla på ganska länge! Testar vi resten av möjligheterna finner vi att $\dfrac{3}{2}$ är ett nollställe. Polynomdivision ger att $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$. Den sista faktorn är strikt positiv så vi är klara.
Svar: $p(x) = (x - 3/2)(2x^2 + 2)$.