Föreläsning 4: Polynomekvationer och binomialsatsen

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

3 september 2022

1 Polynomekvationer

Repetition

Låt
$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$
vara ett polynom.

- Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet har *grad* n.
- Räknat med multiplicitet har $p(z)$ precis n nollställen om $a_n \neq 0$.
- $p(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - z_0)$ är en faktor i $p(z)$.
- Om $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ och $p(z_0) = 0$ så gäller att $p(\overline{z_0}) = 0$.

Exempel

Faktorisera polynomet $p(z) = 3z^4 - 15z^3 + 24z^2 - 18z$ fullständigt i komplexa faktorer.

Lösning. Vi börjar med att bryta ut $3z$ och får att $p(z) = 3zq(z)$, där $q(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$. Vi gissar sedan en rot, och finner att $q(3) = 0$. Alltså måste $z - 3$ vara en faktor i $q(z)$. Polynomdivision ger att $q(z) = (z-3)(z^2 - 2z + 2)$:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2z + 2 \\ \hline
z - 3 & z^3 - 5z^2 + 8z - 6 \\
 & -z^3 + 3z^2 \\ \hline
 & -2z^2 + 8z \\
 & 2z^2 - 6z \\ \hline
 & 2z - 6 \\
 & -2z + 6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Det återstår sålunda att finna rötterna till $z^2 - 2z + 2$. Vi löser ekvationen

$$0 = z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 - 1 + 2 = (z-1)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)^2 = -1,$$

varvid vi ser att $z-1=\pm i$ är de enda möjligheterna. Alltså finner vi lösningarna $z=1\pm i$, och vi kan skriva $z^2-2z+2=(z-(1+i))(z-(1-i))$. Vi kan nu faktorisera $p(z)$ fullständigt enligt

$$p(z)=3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i)).$$

Svar: $p(z)=3z(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i))$
Observera att det inte finns några kvadratrötter ur negativa (eller komplexa tal för den delen) i lösningen! Rötterna dyker upp direkt vid ekvationslösningen.

Exempel

Ekvationen $2z^4-10z^3+15z^2+50z-125=0$ har en lösning z_0 där $\operatorname{Re} z_0=\operatorname{Im} z_0$. Lös ekvationen fullständigt.

Lösning. Låt $p(z)=2z^4-10z^3+15z^2+50z-125$. Från ledningen vet vi att det finns en rot $z=a(1+i)$ för något $a\in\mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned}0=p(a+ai)&=2a^4(1+i)^4-10a^3(1+i)^3+15a^2(1+i)^2+50a(1+i)-125\\&=-8a^4-20a^3(-1+i)+30ia^2+50a(1+i)-125\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-8a^4+20a^3+50a-125=0,\\-20a^3+30a^2+50a=0,\end{cases}\end{aligned}$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel. Imaginärdelen ser vi direkt har $a=0$ som ett nollställe så vi börjar med att ge oss på den:

$$0=-20a^3+30a^2+50a=-20a\left(a^2-\frac{3}{2}a-\frac{5}{2}\right)\quad\Leftrightarrow\quad a=0\text{ eller }a=\frac{3\pm7}{4}.$$

Vi ser att varken $a=0$ eller $a=-1$ löser ekvationen för realdelen:

$$-8a^4+20a^3+50a-125=0,$$

men att $a=5/2$ är en lösning även till denna ekvation. Eftersom koefficienterna i polynomet är reella kommer även $z=a(1-i)$ att vara en rot. Således erhåller vi två nollställen $z=\dfrac{5}{2}(1\pm i)$. Detta medför att $z^2-5z+\dfrac{25}{2}$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision visar att

$$p(z)=\left(z^2-5\,z+\frac{25}{2}\right)\left(2z^2-10\right).$$

Den andra faktorn i högerledet blir noll precis då

$$2z^2-10=0\quad\Leftrightarrow\quad z=\pm\sqrt{5}.$$

Alternativt. Man även utföra en polynomdivision av $p(z)$ med faktorn $z^2-2az+2a^2$. Om $z=a(1\pm i)$ är rötter till polynomet måste denna faktor förekomma. Man erhåller då ett villkor på a som leder till att $a=5/2$ precis som ovan. Mer precist så leder polynomdivisionen till att vi finner resten

$$r(z)=(-20a^2+30a+50)z+40a^3-8a^4-30a^2-125$$

och kvoten

$$k(z)=2z^2+(4a-10)z+(15+4a^2+20a).$$

Eftersom vi vet att polynomdivisionen ska få resten 0 så måste alla koefficienter i $r(z)$ vara noll. Särskilt

$$-20a^2 + 30a + 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1 \text{ eller } \frac{5}{2}.$$

Genom att testa ser vi att endast $a = 5/2$ gör att $r(z) = 0$ för alla z.

Svar: $\frac{5}{2}(1 \pm i)$, $\pm\sqrt{5}$.

2 Kombinatorik och binomialkoefficienter

Fakultet

Definition. Om n är ett naturligt tal definierar vi $n!$ enligt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2, \quad n \geq 1,$$

och $0! = 1$.

Vi startar alltså med något positivt heltal n och multiplicerar sedan ihop samtliga heltal mindre än eller lika med n ned till och med 2. Alltså blir $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, etc.

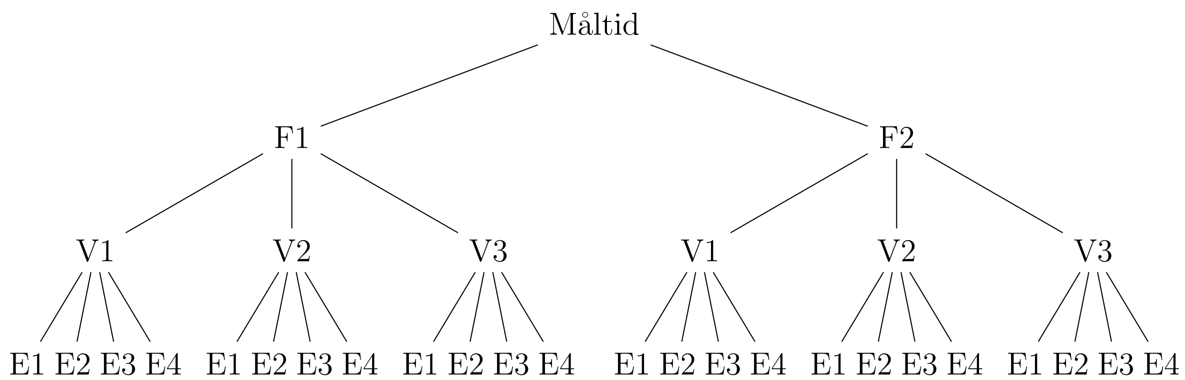
2.1 Kombinatorik

Multiplikationsprincipen: Om vi har en tvåstegsprocess av valmöjligheter, där vi i första steget har n_1 möjliga val och i det andra n_2 möjliga val, så finns det totalt sätt $n_1 \cdot n_2$ kombinationer. Det brukar illustreras med så kallade träddiagram där varje ”löv” på trädet representerar en möjlighet. Antalet löv blir precis produkten ovan.

Exempel

En tre-rätters meny har 2 förrätter, 3 varmrätter, och 4 efterätter. Hur många olika måltider kan man beställa om man vill ha förrätt, varmrätt och efterätt?
Enligt multiplikationsprincipen blir det $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ olika måltider.

Man kan illustrera multiplikationsprincipen med hjälp av träddiagram. I figuren nedan väljer vi på nivå 1 mellan två förrätter (F1 och F2). I nästa nivå väljer vi mellan 3 varmrätter (V1, V2 och V3). I det sista steget väljer vi mellan fyra efterrätter. Varje väg genom trädet ger en unik måltid. Hur många sådana vägar finns det? Det är bara att räkna ihop hur många ”löv” det finns på den sista nivån, vilket blir precis 24 st.



I detta exempel var det viktigt i vilken ordning de olika delarna i måltiden tas (en förrätt är en förätt och så vidare).

Ordning

Vad menar vi med att ordna objekt? Till exempel, hur svarar vi på frågan ”på hur många sätt kan vi ordna siffrorna 1,2 och 3?”

Vi kan helt enkelt skriva ut varianterna:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \quad & 2 & 1 & 3 & \quad & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \quad & 2 & 3 & 1 & \quad & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

och ser att det finns 6 möjliga ordningar.

Detta är ett exempel på följande sats ($3! = 6$).

Permutationer

Sats. Om vi har n stycken olika objekt kan dessa ordnas på $n!$ olika sätt. Vi säger att det finns $n!$ olika *permutationer*.

Hur kan vi se detta? En variant är att vi helt enkelt placerar ut våra n objekt i en viss ordning och funderar över hur många val vi har i varje steg på samma sätt som menykonstruktionen ovan!
Vi ställer upp en lista med plats och skriver ut på hur många objekt vi har kvar att välja på i varje steg.

Plats 1	Plats 2	Plats 3	$\cdots$	Plats $n-1$	Plats n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Multiplicerar vi ihop enligt multiplikationsprincipen ser vi att det blir precis $n!$ kombinationer.

2.2 Binomialkoefficienter

Något lite krångligare? Vi utnyttjar multiplikationsprincipen för att reda ut följande scenario. Om vi har 10 dörrar och ska öppna 6 stycken, på hur många sätt kan vi göra detta om ordningen (dvs i vilken ordning vi öppnar dörrarna) inte spelar någon roll? Vi har tio dörrar och skall välja ut sex st som öppnas:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
10	9	8	7	6	5

Dörr 1 kan vi välja på 10 olika sätt. När vi sedan väljer dörr 2 finns det bara 9 kvar att välja på. Och så vidare. Ordningen på dörrarna är nu fixerad, och vi får (från multiplikationsprincipen) att det finns

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$$

sådana val. Detta är alltså svaret om vi vill göra skillnad på i vilken ordning dörrarna öppnas. När de sex dörrarna är valda kan vi variera ordningen mellan dessa 6 på $6!$ olika sätt:

Dörr 1	Dörr 2	Dörr 3	Dörr 4	Dörr 5	Dörr 6
6	5	4	3	2	1

Vi kan nu ta bort ”multipla” dörrval (de kombinationer som bara skiljer sig åt med i vilken ordning sex st specifika dörrar ligger):

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \binom{10}{6}.$$

Detta uttryck kallas för en binomialkoefficient!

Binomialkoefficient

Definition. Om n och k är icke-negativa heltal så att $k \leq n$ så definieras *binomialkoefficienten* enligt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Exempel

Räkna ut $\binom{27}{25}$.

Lösning. Detta gör vi direkt från definitionen:

$$\binom{27}{25} = \frac{27!}{25! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$$

Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ har alltså tolkningen ”hur många sätt kan vi (utan ordning) välja ut k element från en mängd med n olika element?”

Egenskaper för binomialkoefficienter

(i) $\binom{n}{k}$ är alltid heltal.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ då $n \geq 2$ och $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Exempel

Vid *Camp Crystal Lake* härjar en våldsverkare iklädd en hockeymask, låt oss kalla honom Jason. Jason planerar att mörda tre ungdomar en natt och har nio tillhyggen att välja på. Om vi bortser från ordningen på morden (alltså vem som blir mördad först etc), hur många unika mordserier kan Jason åstadkomma för dessa tre ungdomar om han använder precis ett tillhygge på varje individ (utan upprepning)?

Lösningen är enkel om vi bara abstraherar bort all text. Vi väljer alltså ut 3 objekt från 9 utan ordning. Detta kan göras på $\binom{9}{3}$ olika sätt enligt ovan, och

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

Svar. 84 olika sätt.

3 Binomialsatsen

Ett minnestrick för att komma ihåg binomialkoefficienter (åtminstone för rimligt små n) är Pascals triangel:

Pascals triangel

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Denna konstruktion bygger på den rekursiva formeln $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ som gäller för vettiga val på n och k. Detta motsvarar alltså i triangeln ovan att varje siffra kan fås genom att summera de siffror som står närmast på raden ovanför. De möjliga k-värdena startar på 0 längst till vänster på varje rad med $\binom{n}{0}$. Sedan kommer $\binom{n}{1}$, följt av $\binom{n}{2}$, och så vidare, till slutligen $\binom{n}{n}$. Rad n har alltså $n+1$ siffror (kontrollera!); en siffra för varje möjligt värde på k. Till exempel så är $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$; kolla på raderna för $n = 4$ och $n = 3$. På så sätt kan vi iterativt konstruera nästa rad om vi känner nuvarande rad.
Ibland skriver man Pascals triangel lite mer som en rätvinklig triangel i stället. Då blir det lite lättare att se hur k hänger ihop med allt:

Pascals (rätvinkliga) triangel

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\cdots$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							

En av de vanligaste tillämpningarna för binomialkoefficienter är binomialsatsen.

Binomialsatsen

Sats. Om n är ett ickenegativt heltal så gäller för alla x att

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Bevis. Vi skriver ut parentesen:

$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ st}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Så hur bestämmer vi koefficienterna a_k? Om vi kikar närmare på produkten i mellanledet så ser vi att vi ur varje parentes kommer att välja ett x eller en etta när vi multiplicerar ihop allt. Om vi till exempel tittar på x^5 så ska vi alltså välja 5 stycken x och resten, dvs $n-5$ stycken, ettor. Hur många sätt kan vi välja 5 objekt av n stycken utan ordning (ingen skillnad på olika x eller olika ettor)? Svaret är så klart binomialkoefficienten $\binom{n}{5}$, vilket då visar formeln i satsen ovan eftersom argumentet kan upprepas för varje k.

Exempel

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

Ofta ser man binomialsatsen på följande form:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Detta kan visas med följande manipulation (såvida $b \neq 0$):

$$(a+b)^n = b^n \left(\frac{a}{b}+1\right)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

En typisk användning av binomialsatsen är att identifiera vad koefficienten före en viss term är i en summa av typen i föregående exempel.

Exempel

Bestäm koefficienterna före x^8 och x^9 i uttrycket $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$.

Lösning. Vi använder binomialsatsen och skriver

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k \left(\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{k-(10-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{2k-10}.\end{aligned}$$

Vi ser att x får exponenten 8 om och endast om $2k-10=8 \Leftrightarrow k=9$. Koefficienten blir alltså $\binom{10}{9} 2^{10-9} = 20$. När dyker då x^9 upp? Vi skulle behöva $2k-10=9$, eller $k=19/2$. Detta är inget heltal mellan 0 och 10 (de heltal vi summerar över). Således saknas termen x^9, koefficienten är alltså noll.
Svar: 20 respektive 0.