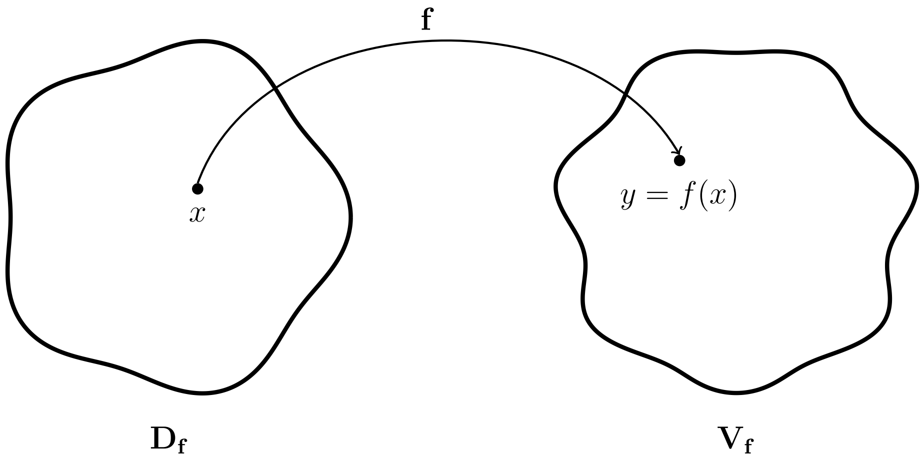
# Föreläsning 5: Funktioner

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

16 augusti 2022

Vad är egentligen en funktion?

**Definition.** En funktion $f$ är en regel som till varje punkt $x$ i en definitionsmängd $D_f$ tilldelar precis ett $y$ enligt sambandet $y = f(x)$.




Denna definition kan göras lite mer ordentlig med så kallade relationer på mängder, men vi överlämnar detta till senare kurser. Observera här att vi inte sagt något om att definitionen bara gäller reella tal. Eller ens tal överhuvudtaget! Det kunde lika gärna handla om apelsiner eller solar ute i rymden. För vår del (i denna kurs) kommer vi i denna kurs oftast att betrakta reellvärda funktioner (där $y \in \mathbf{R}$ alltså), och i princip alltid är även $x \in \mathbf{R}$ (eller någon delmängd). Ett undantag är faktiskt polynomen $p(z)$ som vi diskuterade ovan, där $z \in \mathbf{C}$ generellt sätt. Funktioner av en komplex variabel brukar man ta upp i separata kurser.

**Funktion och funktionsvärde**

Observera att det är $f$ som är funktionen. Uttrycket $f(x)$ är det värde funktionen antar i punkten $x \in D_f$. Det är alltså ganska slarvigt att skriva uttryck i stil med ”funktionen $f(x)$”, men vi tillåter oss göra det ibland.

## Värdemängd

**Definition.** En funktions värdemängd $V_f$ definieras som alla möjliga $y$-värden vi kan få ur sambandet $y = f(x)$,

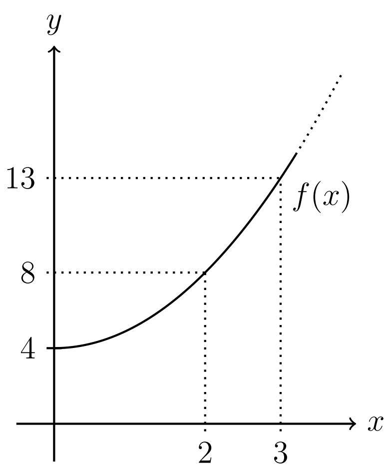
$$V_f = \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Generellt sett kan värdemängden vara svår att bestämma för en godtycklig funktion. Vissa verktyg kommer att introduceras i envariabelanalysen, men för oss just nu är vi begränsade till ganska enkla funktioner. Till exempel vissa enkla polynom kan vi enkelt rita och se vad värdemängden blir (även om vi också då implicit använder vissa resultat ni kommer att få se i nästa kurs).

## Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ för $x \geq 0$. Bestäm $V_f$ och rita funktionen.

Skissar vi funktionen kan vi till exempel göra med en klassisk värdetabell för att få en uppfattning. Sen är det ett polynom så det hela beter sig ganska snällt.




| $x$ | $y = 4 + x^2$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |
| 3 | 13 |
| 4 | 20 |
| $\dots$ | $\dots$ |

Det som är bra med en bild här är att vi direkt kan se att varje $y$-värde större än eller lika med 4 kan träffas av (precis ett) $x$-värde. Till exempel så blir $y = 5$ precis då $5 = 4 + x^2$, dvs då $x^2 = 1$. Eftersom $D_f$ ges av villkoret $x \geq 0$ så är det bara $x = 1$ som passar.
**Svar**. $V_f = [4, \infty[$.

Figuren ovan brukar kallas **grafen** för funktionen $f$. Formellt så är grafen en mängd av punkter $(x, y)$, där $y = f(x)$, som beskriver hur definitionsmängd och värdemängd hänger ihop. För vår del räcker det med att betrakta grafen som en ritad figur där vi ser hur $x$ och $y$-värden hänger ihop.

## Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$. Bestäm $D_f$ och $V_f$.

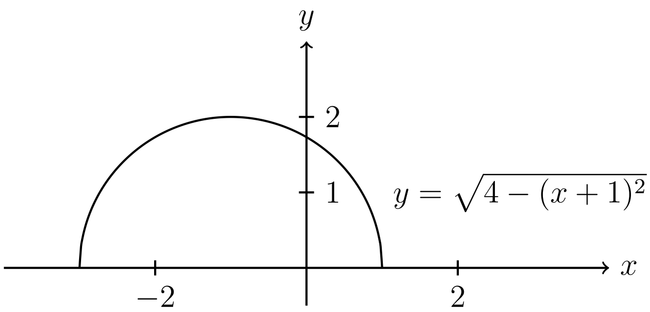
Borde inte $D_f$ vara angiven? Inte nödvändigtvis. Om inget står brukar vi anta att $D_f$ är största möjliga mängd där $f$ är naturligt definierad. I detta fall är detta när kvadratroten är definierad. Hur reder vi ut när detta sker? Vi börjar med att analysera det som står i rottecknet. Det är ett polynom av grad två, så en vettig start är att kvadratkomplettera:

$$3 - x^2 - 2x = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - ((x+1)^2 - 1) = 4 - (x+1)^2.$$

Eftersom kvadratorten bara är definierad för icke-negativa argument så måste $4 - (x+1)^2 \geq 0$. Faktoriseringen och en teckentabell visar att $-3 \leq x \leq 1$ är nödvändigt. Så vilka $y$-värden kan vi få ut? Vi studerar ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4 - (x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 - (x+1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Detta är inget annat än ekvationen för övre delen av en cirkel med radie 2 och centrum i $(-1, 0)$. Största möjliga värde är alltså 2 (när $x = -1$) och minsta möjliga värde är 0 (när $x = -3$ eller $x = 1$). I en figur kan det mesta vi precis räknat ut utläsas direkt (men man måste så klart rita figuren på något sätt också).

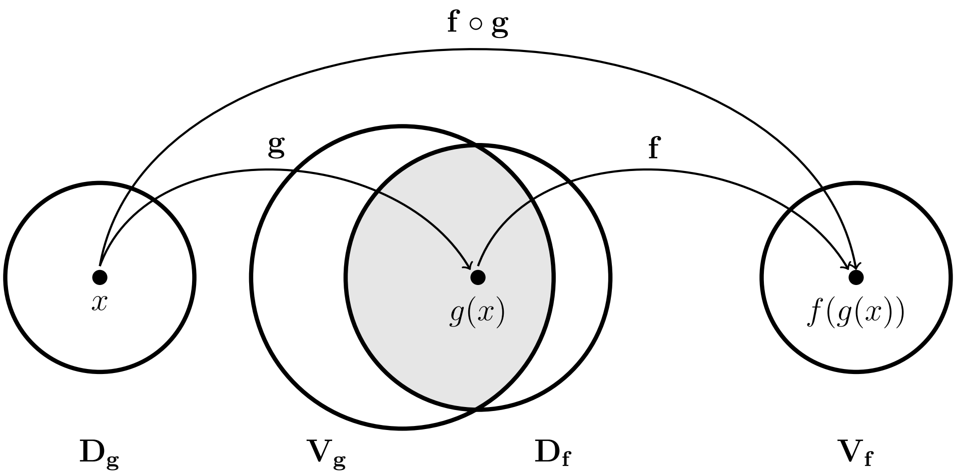



**Svar**. $D_f = [-3, 1]$ och $V_f = [0, 2]$.

Vad händer om vi sätter ihop två funktioner?

### Sammansättning

**Definition.** Sammansättning $f \circ g$ av två funktioner $f$ och $g$ definieras som $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ för de $x$ där detta uttryck har mening.



Observera här att för $f \circ g$ blir definitionsmängden

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Det följer alltså att $D_{f \circ g} \subset D_g$, men i allmänhet gäller att $V_g \neq D_f$. Var således försiktiga vid hanterandet av sammansättningar.

**Exempel**

Låt $g(x) = 1 - x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Jämför $f \circ g$ och $g \circ f$.

Ser vi på $f$ och $g$ separat så är $D_f = [0, \infty[$ och $D_g = \mathbf{R}$. Om vi betraktar $f \circ g$ så måste $1 - x^2 \geq 0$, eller ekvivalent, $-1 \leq x \leq 1$. Så,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1,$$

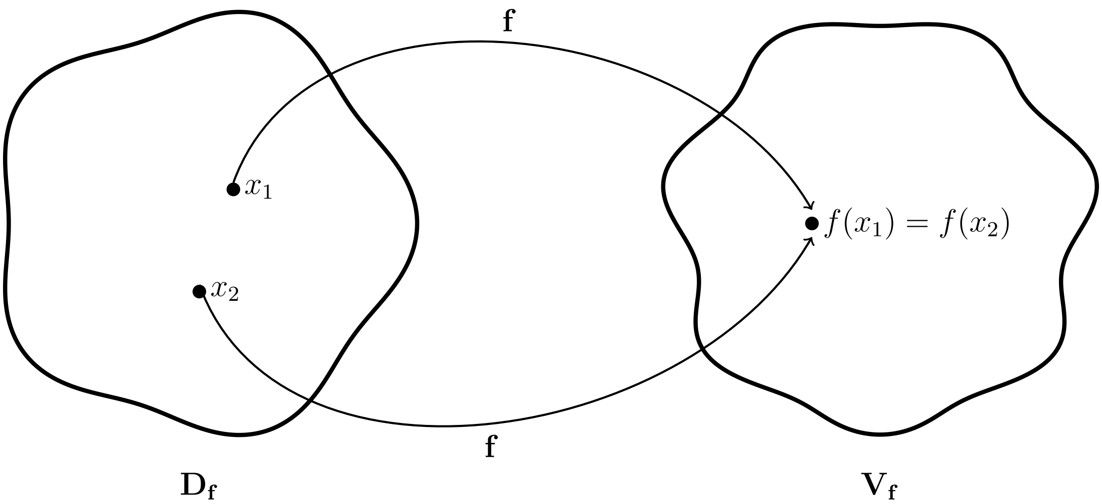
och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{för } x \geq 0.$$

Observera att vi får både olika sammansatta uttryck och olika definitionsmängder för $f \circ g$ och $g \circ f$. Ordningen är alltså mycket viktig både för värdet och definitionsmängd för den sammansatta funktionen!

# 1 Inverterbarhet

En mycket vanlig fråga när vi analyserar funktioner är om funktioner är "omvändbar" i den meningen att om vi känner till utvärdet $y = f(x)$, går det att hitta ett enda $x$ (så det endast finns ett alternativ) som ger detta $y$? Funktioner som har denna egenskap brukar vi kalla för **injektiva**. Om det finns två punkter $x_1, x_2 \in D_f$ så att $y = f(x_1) = f(x_2)$ så kan vi inte bestämma vilket alternativ som givit ett visst $y$-värde.



## Injektivitet

**Definition.** En funktion $f$ kallas **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om det till varje $y \in V_f$ finns precis ett $x \in D_f$ så att $y = f(x)$. Eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Alla injektiva funktioner går att invertera.

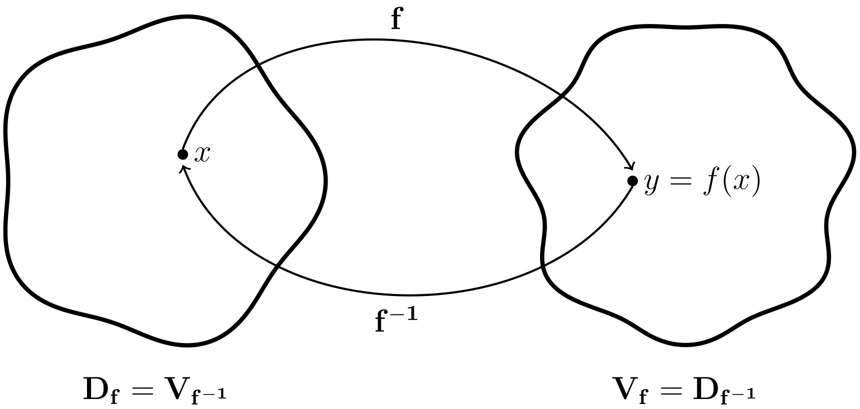
## Invers

**Definition.** För en injektiv funktion $f$ så definierar vi den inversa funktionen $f^{-1}$ enligt

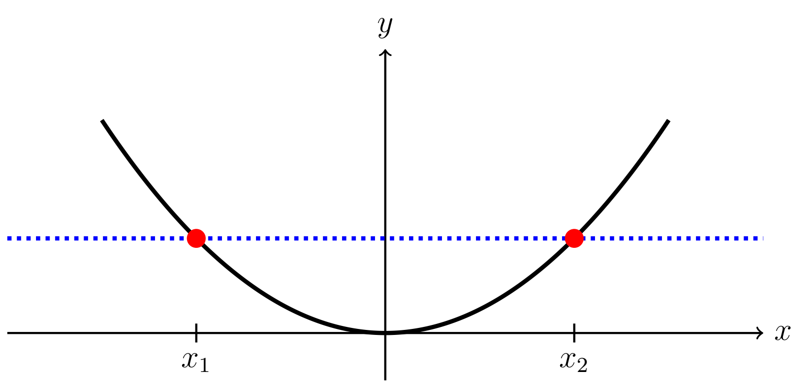
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Märk att av nödvändighet så gäller för definitions- och värdemängder att

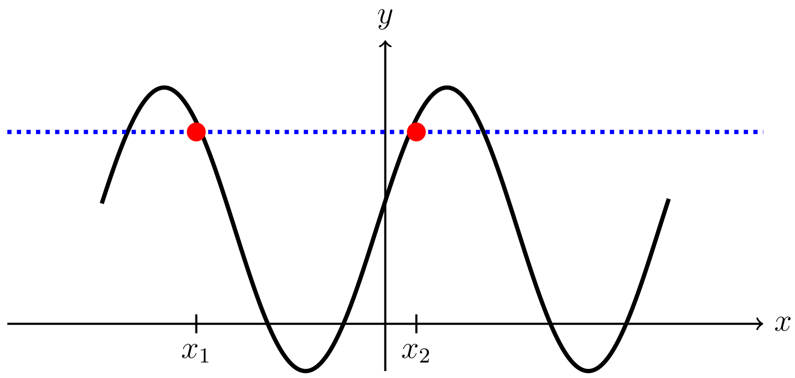
$$D_{f^{-1}} = V_f \qquad \text{och} \qquad V_{f^{-1}} = D_f.$$



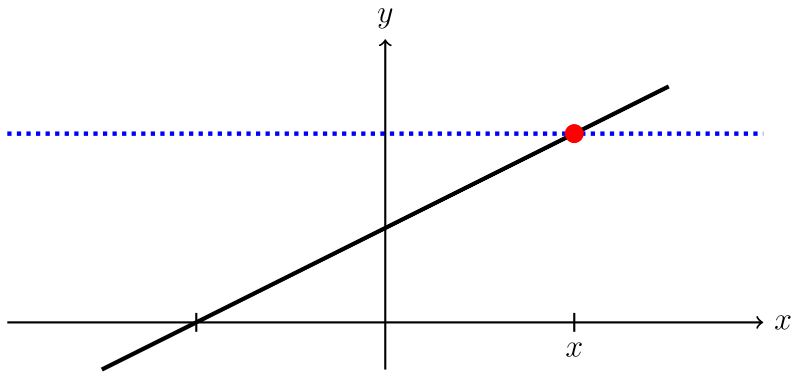

Så hur ser en injektiv funktion ut? Låt oss först titta på ett par fall där funktionen inte kan vara injektiv (utan att inskränka definitionsmängden).



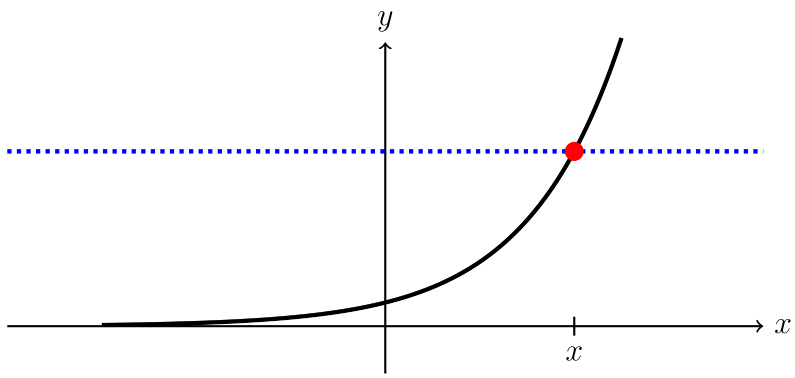

Här ser vi att det för alla $y$-värden större än noll så hittar vi 2 möjliga $x$-värden som skulle ge detta $y$-värde. Således gäller det *inte* att $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen är inte injektiv.




Här är ett exempel som likt ovan innebär att det finns flera $x$-värden som ger samma $y$-värde (till och med ännu fler alternativ än i förra exemplet). Funktionen är således inte injektiv (utan att vi begränsar definitionsmängden).




I detta exempel ser det ut som att varje $x$-värde endast hör ihop med ett y-värde. Alltså med andra ord att $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktionen verkar vara injektiv.




Även i detta exempel ser det ut som att varje $x$-värde endast hör ihop med ett $y$-värde Det är lite svårt att avgöra vad som händer när $x$ blir ett stort negativt tal, så en mer noggrann undersökning är nödvändig. Men det är inte orimligt att funktionen är injektiv.

Så en naturlig fråga blir hur vi hittar inversen (om den finns)? Lösningen är ganska enkel. Vi löser helt enkelt ut $x$ ur ekvationen $y = f(x)$. Skulle det vara så att detta inte är möjligt att göra på ett entydigt sätt så finns ingen invers.

**Exempel**

Finn ett uttryck för inversen (om möjligt) till $f(x) = \sqrt{4-(x+1)^2}$, $x \geq -1$.

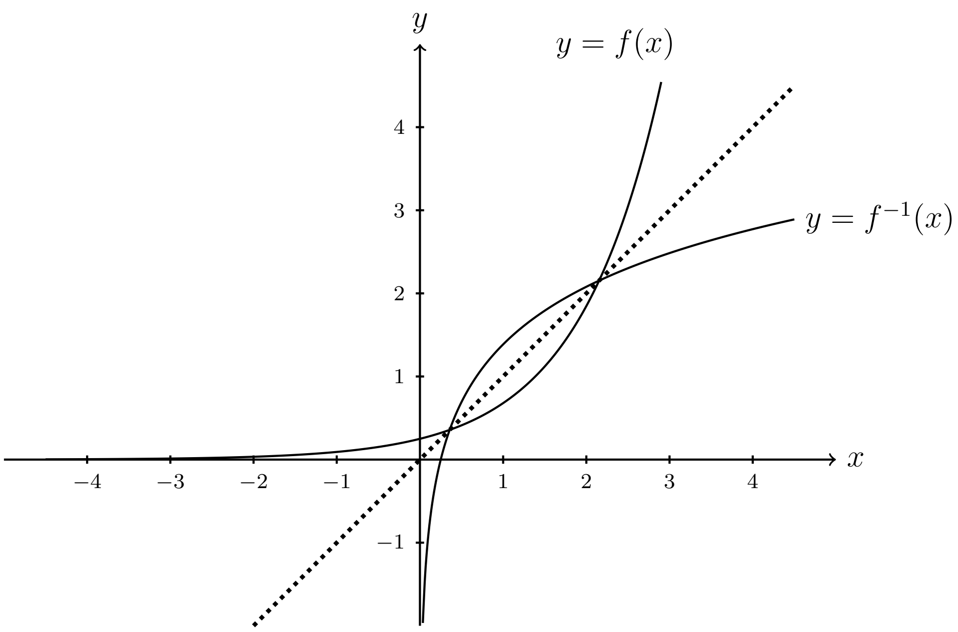
**Lösning**. Vi försöker helt enkelt att lösa ut $x$ ur ekvationen $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = 4-(x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{4-y^2} \end{aligned}$$

Men $x \geq -1$ så endast $x = -1 + \sqrt{4-y^2}$ är möjligt. Eftersom vi bara får ett möjligt svar så finns inversen. Detta följer av att vi startar med det sanna påståendet att $y = f(x)$ (vilket måste gälla eftersom vi *definierar* $y$ enligt den likheten), så det sista påståendet i vår kedja av implikationer *kan inte* vara falskt. Hittar vi bara en möjligt så *måste* detta vara ett uttryck för inversen.

**Svar**. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4-x^2}$.

Grafiskt går det att representera inversen som speglingen av kurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$.




**Exempel**

Låt $f(x) = 4 + x^2$ där $D_f = \mathbf{R}$. Undersök om $f$ är injektiv.

**Lösning**. Nej, $f$ kan inte vara injektiv. Kvadraten är ett vanligt tecken på att en funktion inte är injektiv om $D_f$ innehåller viss symmetri kring nollan. Specifikt, till exempel

$$f(-1) = 4 + (-1)^2 = 4 + (1)^2 = f(1).$$

Alltså är $f$ inte injektiv.

## 2 Monotonicitet

**Monotonicitet**

**Definition.** En funktion kallas (om för alla $x_1, x_2 \in D_f$)

(i) **växande** om $x_1 \le x_2$ medför att $f(x_1) \le f(x_2)$;

(ii) **strängt växande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$;

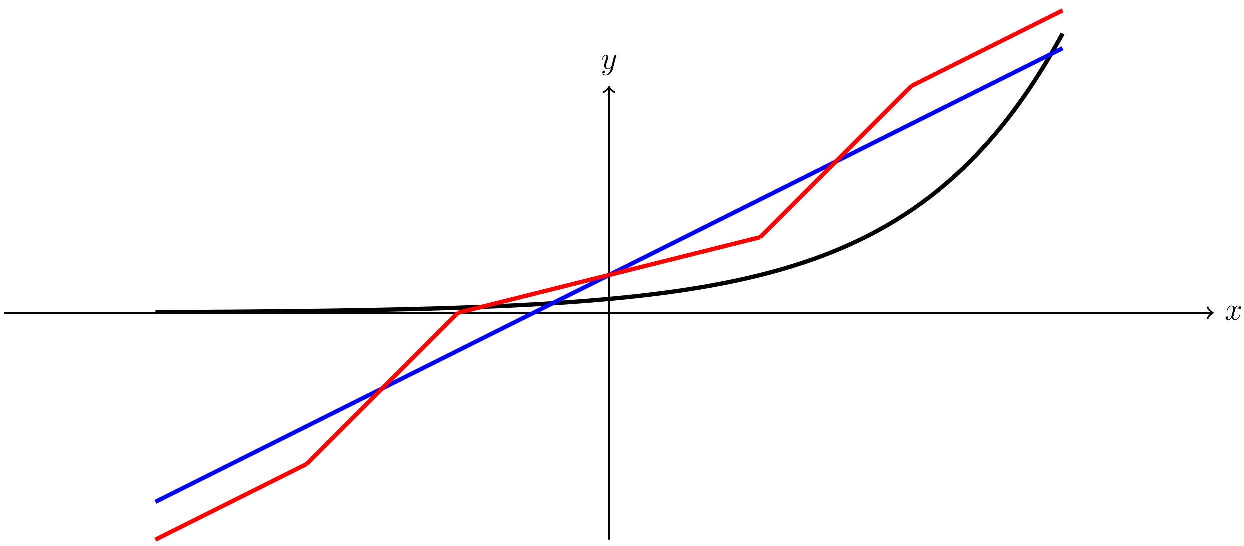
(iii) **avtagande** om $x_1 \le x_2$ medför att $f(x_1) \ge f(x_2)$;

(iv) **strängt avtagande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) > f(x_2)$;

(v) **monoton** om $f$ är växande eller avtagande;

(vi) **strängt monoton** om $f$ är strängt växande eller strängt avtagande.

Nedan följer 3 exempel på (strängt) växande funktioner.




**Avtagande eller icke-växande?**

I litteraturen är uttrycket avtagande/växande inte entydigt bestämt. I vissa fall (som vi definierat det) innebär till exempel avtagande att vi endast har $\le$, så en konstant funktion uppfyller detta villkor. Verkar det vettigt att kalla en konstant funktion för både växande och avtagande? Det är en definitionsfråga. Ett vettigare uttryck är egentligen, till exempel, icke-växande. Var försiktig om ni läser andra böcker!

Så hur visar man att något är, till exempel, strängt växande? I envariabelanalyskursen kommer ni att lära er andra metoder, men i detta fall är vi tvungna att visa att olikheten i föregående definition är uppfylld. Vi betraktar ett exempel.

**Exempel**

Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

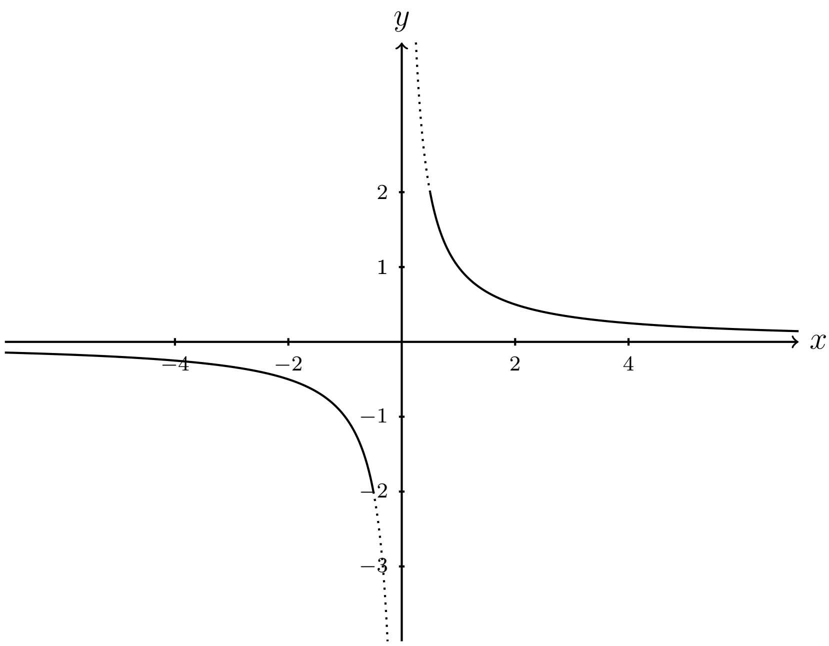
**Lösning**. Vi undersöker $f(x_2) - f(x_1)$ och visar att detta uttryck är strikt större än noll om $x_1 < x_2$. Vi ser att $x_1 - x_2$ borde vara en faktor så vi försöker faktorisera:

$$\begin{aligned} x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \\ &= (x_2 - x_1)\left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4}\right) > 0 \end{aligned}$$

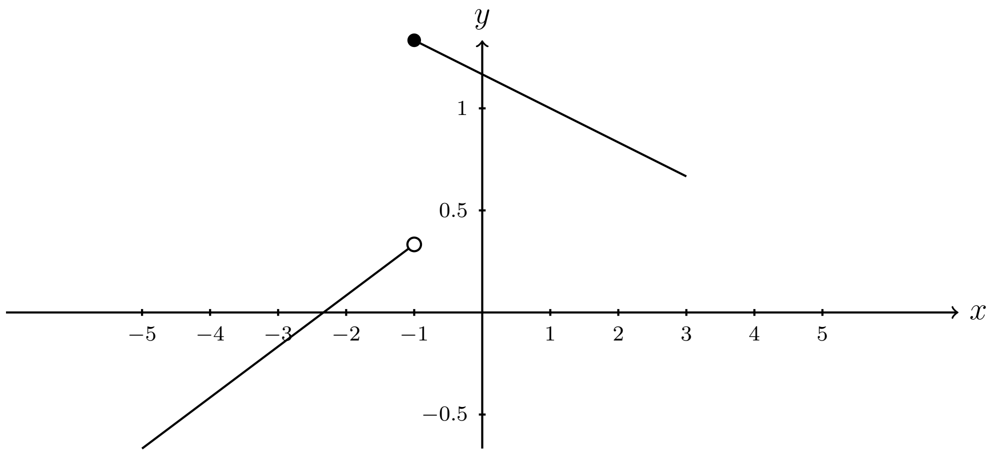
ty $(x_1 + x_2/2)^2 + 3x_2^2/4 > 0$ om $x_2 > x_1$ och $x_2 - x_1 > 0$.

**Sats.** En strängt monoton funktion är alltid inverterbar.

Märk väl att satsen ovan endast är en implikation. En inverterbar funktion behöver inte vara strängt monoton. Ett enkelt exempel är funktionen $n(x) = \dfrac{1}{x}$ med $D_n = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Figuren nedan visar utseendet.




Uppenbarligen gäller inte att om $x_1 < x_2$ med $x_1, x_2 \in D_n$ så är $n(x_1) > n(x_2)$ i fallet då $x_1 < 0$ och $x_2 > 0$. Men lokalt kring varje punkt $x \in D_n$ gäller så klart att $n$ är strängt avtagande. Problemet uppstår i ”punkteringen” av definitionsmängden där funktionen tillåts hoppa ordentligt. Fusk? Kan vi hitta exempel på ett sammanhängande intervall? Ett sätt att konstruera ett sådant exempel är att skarva ihop två funktioner — en växande och en avtagande — så det uppstår ett ”hopp” som separerar graferna. Ta till exempel följande funktion $h$ med definitionsmängd $D_h = [-5, 3]$.




Det är tydligt att varje $y$-värde i värdemängden motsvarar precis ett $x$-värde i definitionsmängden, så funktionen är inverterbar. Däremot är den så klart varken strängt växande eller avtagande. Nu kanske man kan tycka att $h$ ändå i princip är monoton eftersom den är det på olika delintervall, så den går att dela upp i två delar där $h$ är endera strängt avtagande eller strängt växande. Skulle den slutsatsen gälla generellt? Går det alltid att dela upp i mindre intervall där funktionen är strängt växande eller avtagande? Svaret är nej. Betrakta till exempel följande roliga funktion:

$$d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen $d$ definieras alltså enligt $d(x) = x$ om $x$ är rationell och $d(x) = 1 - x$ om $x$ är irrationell. På intervallet $]0, 1[$ är $d$ uppenbarligen inverterbar ty $d^{-1}(x) = d(x)$, men det finns inget delintervall där $d$ är växande eller avtagande. Att ge sig in på att rita funktionen blir dock problematiskt (varför?).

När begreppet kontinuitet introduceras i envariabelanalysen får ni svaret på frågan om en *kontinuerlig* funktion definierad på ett intervall kan vara inverterbar utan att vara strängt växande eller avtagande på definitionsintervallet.

# 3 Logaritmfunktioner

Ni har säkert stött på logaritmer tidigare för att svara på frågor av typen "om $10^x = 12$, vad blir $x$?" Vi svara på den frågan genom att använda 10-logaritmen. För oss kommer det dock att vara mer användbart att introducera den *naturliga logaritmen* (som vi sedan kan använda för att ta fram logaritmer med andra *baser*).

### Den naturliga logaritmen

**Definition.** Vi definierar funktionen $\ln\colon ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ som den deriverbara funktion med definitionsmängd $]0, \infty[$ och värdemängd $\mathbf{R}$ som uppfyller att

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0, \tag{1}$$

och

$$\ln(x) < x - 1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \tag{2}$$

Den finns nu två uppenbara frågor: hur vet vi att en funktion med dessa egenskaper överhuvudtaget existerar och om det finns sådana funktioner, hur vet vi att det bara finns en? Detta är en fråga om existens och entydighet, något vi tryckt hårt på när vi arbetat med ekvationslösning (vi har konsekvent strävat efter att behålla ekvivalenser).
Nästa problem är att vi behöver derivatan och gränsvärden för att bevisa detta. Ni kommer få se dessa begrepp mer ordentligt i nästa analyskurs, men vi kommer använda dessa verktyg för att svara på frågorna ovan. Men innan dess, låt oss undersöka vilka konsekvenser vi erhåller endast av definitionen ovan.
Låt $x, y > 0$. Då gäller följande egenskaper.

1. Vi ser att $\ln(1) = 0$ ty
$$\ln(1) = \ln(1 \cdot 1) = \ln(1) + \ln(1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1) = 0.$$
2. Vi erhåller en regel för kvoter genom
$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$
3. En följd av föregående två egenskaper är att
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$
4. För $p \in \mathbf{Z}$ gäller att
$$\ln x^p = p \ln x.$$
Denna egenskap följer av de föregående, vilket kan visas genom att betrakta $x^p = x \cdot x \cdots x$ (om $p > 0$). För $p < 0$ kan vi betrakta $-\ln x^p$. Observera att vi inte kan säga något om fallet då $p$ ej är ett heltal i nuläget; vi återkommer till detta under nästa föreläsning.
5. Eftersom $\ln(t) < t - 1$ för $t \neq 1$ (och $t \neq 0$) så gäller att (med $t = 1/x$)
$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$
så
$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \tag{3}$$
6. Två följder av föregående dubbelolikhet är att
   (a) om $x > 1$ så är $\ln x > 0$;
   (b) om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$.
7. Den naturliga logaritmen ln är strängt växande: låt $x_2 > x_1 > 0$. Då är $\dfrac{x_2}{x_1} > 1$, så
$$0 < \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x_1 < \ln x_2.$$

# 4 Bevis för att ln existerar

Vi visar nu att ln existerar och är entydigt bestämd. Som nämnt ovan så behöver vi verktyg vi inte gått igenom ordentligt, men återkom gärna till detta avsnitt när ni studerat gränsvärden och derivata i nästa kurs.

**Sats.** Låt $L\colon ]0,\infty[\to \mathbf{R}$ vara en deriverbar funktion. Då gäller att

$$L(xy) = L(x) + L(y), \quad \text{för alla } x, y > 0,$$

om och endast om

$$L(1) = 0 \quad \text{och} \quad L'(x) = L'(1)\,\frac{1}{x}.$$

**Bevis**. Vi antar först att $L(xy) = L(x)+L(y)$. Enligt tidigare vet vi att detta medför att $L(1) = 0$. Vidare så erhåller vi att

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - L(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L(x) + L\left(1+\frac{h}{x}\right) - L(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right) - L(1)}{h/x} = \frac{1}{x} L'(1). \end{aligned}$$

Om vi istället antar att $L'(x) = L'(1)\,\frac{1}{x}$ och $L(1) = 0$ så ser vi att för $y > 0$ så gäller att

$$\frac{d}{dx}\left(L(xy)\right) = y \cdot L'(xy) = y \cdot \frac{L'(1)}{xy} = \frac{L'(1)}{x},$$

så $L(x)$ och $L(xy)$ har samma derivata (vi använde här kedjeregeln för att beräkna derivatan). Då kan dessa uttryck endast skilja sig åt med en konstant, säg

$$L(xy) = L(x) + C,$$

för något $C \in \mathbf{R}$. Men då $L(1) = 0$ så vet vi att

$$L(y) = L(1\cdot y) = L(1) + C = C,$$

så

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

**Sats.** För funktionen $L(x) = \ln(x)$ gäller att $L'(1) = 1$.

**Bevis**. Detta faktum följer ty för $h \neq 0$ så är

$$\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) < \frac{x}{h}\left(1 + \frac{h}{x} - 1\right) = 1$$

samt

$$\frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} \cdot L\left(1 + \frac{h}{x}\right) > \frac{x}{h} \cdot \frac{1 + h/x - 1}{1 + h/x} = \frac{1}{1+\frac{h}{x}}$$

enligt olikhet (3). Eftersom detta gäller för alla $h \neq 0$ så följer det att

$$\lim_{h\to 0} \frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x} = 1$$

då både övre och undre gräns blir 1 då $h \to 0$. Kom ihåg *instängningsprincipen* till TATA41!

Funktionen $L(x) = \ln(x)$ kan således definieras som den primitiva funktion $L(x)$ till $L'(x) = \dfrac{1}{x}$ som uppfyller att $L(1) = 0$.