Föreläsning 7: Trigonometri

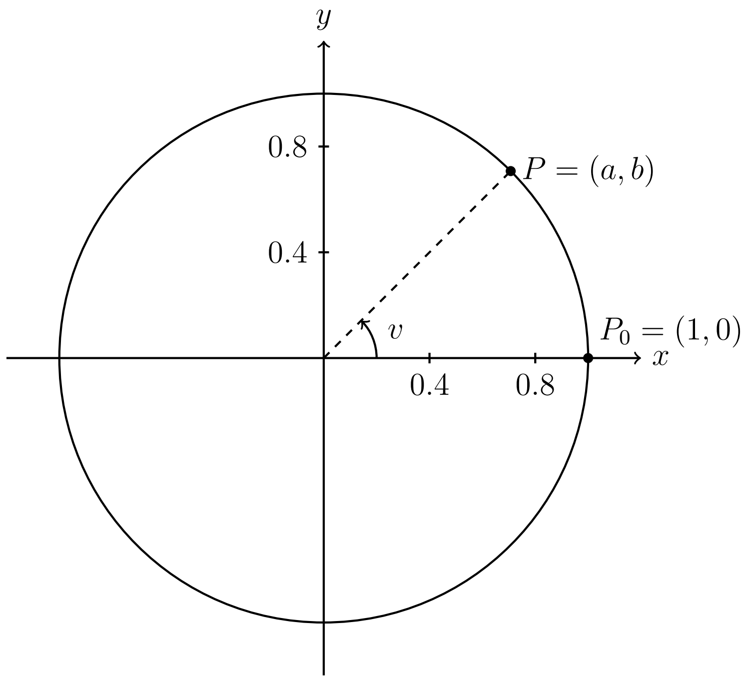
Johan Thim (johan.thim@liu.se)

16 augusti 2022

1 Enhetscirkeln

Definition. Enhetscirkeln är cirkeln med centrum i origo och radie ett.

En punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln uppfyller alltså $a^2 + b^2 = 1$.



Vinkel

Definition. Vinkeln v definieras som båglängden från P_0 till P i positiv led (moturs).

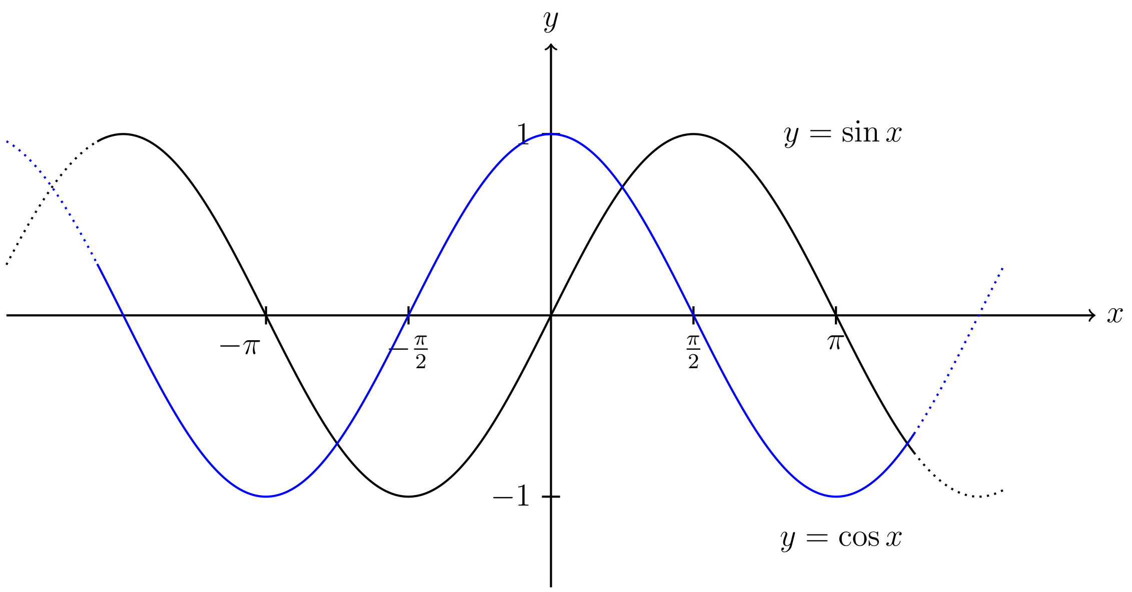
Det följer alltså att ett varv motsvaras av vinkeln 2π (cirkelns omkrets).

Sinus och cosinus

Definition. Vi definierar funktionerna sin och cos genom

$$\sin v = b \qquad \text{och} \qquad \cos v = a.$$

Det är naturligt att tänka sig $\cos v$ och $\sin v$ i termer av punkter på enhetscirkeln (eftersom punkten $(\cos v, \sin v)$ enligt definition alltid är en punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$), men det går även att betrakta funktionerna som en vanliga funktionsgrafer.



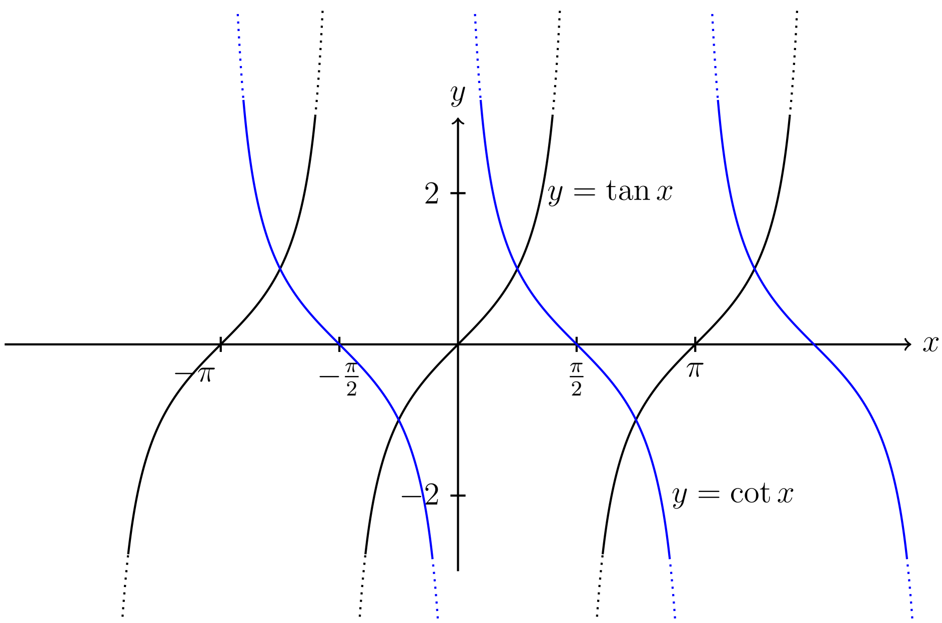
Definition. Funktionerna tan och cot definierar vi genom

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \quad \text{då } v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}$$

och

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}, \quad \text{då } v \neq n\pi \text{ för alla } n \in \mathbf{Z}.$$

Tangens är lite svårare att direkt visualisera i enhetscirkeln (se boken för en variant). Vanligare kanske är att betrakta dessa funktioners grafer. Notera speciellt vad som händer vid punkter av typen $x = (n + 1/2)\pi$ för $\tan x$ och $x = n\pi$ för $\cot x$ (med $n \in \mathbf{Z}$).



Följder från dessa definitioner (sådant vi kan se ur enhetscirkeln).

(i) Trigonometriska ettan: $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$;

(ii) $\sin(v + 2\pi n) = \sin v$ och $\cos(v + 2\pi n) = \cos v$ för $n \in \mathbf{Z}$;

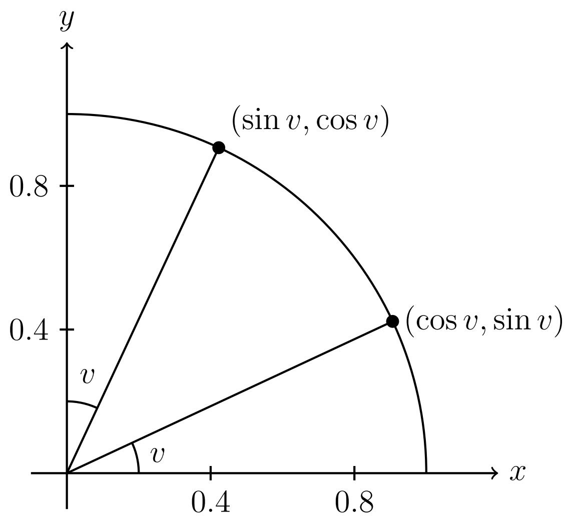
(iii) $\sin(v + \pi) = -\sin v$, $\cos(v + \pi) = -\cos v$, $\tan(v + \pi) = \tan v$ och $\cot(v + \pi) = \cot v$;

(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$ och $\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v$;

(v) $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$;

(vi) $\cos(\pi - v) = -\cos v$ och $\sin(\pi - v) = \sin v$.

Till exempel punkt (iv) kan vi se ur följande figur.



Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Parenteser?

Som vi redan sett skriver vi ibland $\sin v$ och ibland $\sin(v)$. Tanken är att om det inte råder någon tvetydighet om vad som är argumentet till funktionen så skriver vi inte ut parentesen Uttrycket $\sin \pi/3$ är tydligt medan $\sin \pi/3 + \pi/2$ inte är lika klart. Om det inte är självklart vad uttrycket betyder, skriv ut parenteser! Men gör det inte i onödan för då blir uttrycken svårlästa.

2 Trigonometriska ekvationer

Följande samband kan ses direkt ur enhetscirkeln:

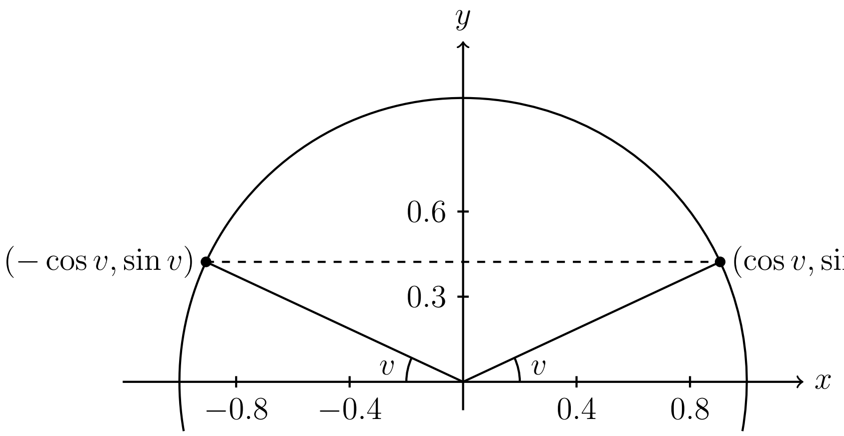
(i) $\sin u = \sin v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + 2\pi n$ eller $u = \pi - v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\cos u = \cos v \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm v + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

(iii) $\tan u = \tan v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$;

(iv) $\cot u = \cot v \quad \Leftrightarrow \quad u = v + \pi n,\ u \neq k\pi,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

Till exempel (i) kan illustreras med följande figur.



Det finns alltså två ”sätt” att få ett visst värde på sinus, den ”naturliga” vinkeln v men även $\pi - v$. Sen kan vi så klart snurra runt hur många varv vi vill för att hitta andra vinklar, men dessa två är principlösningarna.

Exempel

Finn alla $x \in \mathbf{R}$ så att $\sin 2x = \cos 3x$.

Lösning. Om vi hade haft samma trig-funktion på båda sidorna i likheten så hade vi kunnat använda sambanden ovan direkt. Kan vi komma dit? Visst går det, på flera olika sätt. En variant är att utnyttja att $\cos v = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)$ och därmed att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos 3x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \text{ eller } 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n. \end{aligned}$$

Fall 1:

$$2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$$

Fall 2:

$$2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi n. \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n.$$

Här finns flera saker att kommentera. Variabeln n antar alla heltal $\mathbf{Z}$ (alltså $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), så om vi har $+2\pi n$ eller $-2\pi n$ spelar egentligen ingen roll, så den sista likheten kan lika gärna skrivas

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Svar: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}$ och $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ där $n \in \mathbf{Z}$.

Sen kan det visa sig att vissa vinklar förekommer både i fall 1 och fall 2, så vill man snygga till svaret så måste det undersökas. I vårt fall ser vi att för att få $-\pi/2$ i fall 1 måste

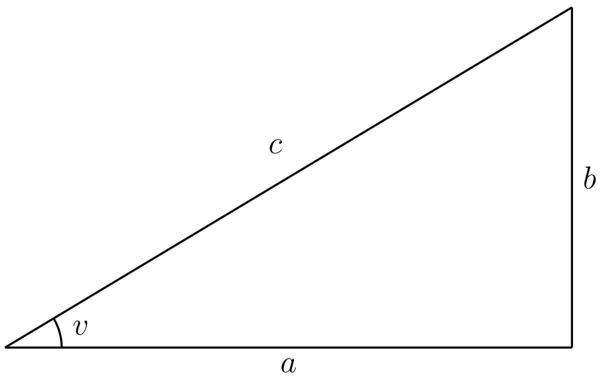
$$\frac{1+4n}{10} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1+4n = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2n = -3,$$

vilket betyder att vi aldrig får med $-\pi/2$ i den första lösningsskaran eftersom $n = -3/2$ inte är ett heltal.

Notera även att vi alternativt hade kunnat byta ut $\sin 2x$ mot $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ i början av lösningen (vad ändras?).

3 Trigonometriska funktionsvärden

För vissa standardvinklar förväntas vi kunna sinus, cosinus etc av mer eller mindre utantill. Vilka? Vi betraktar fallet då vinkeln ligger i intervallet $\left]0, \pi/2\right[$. I detta fall kan vi använda trianglar för att reda ut vissa vinklar. Låt oss undersöka en rätvinklig triangel.



Här är

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

och

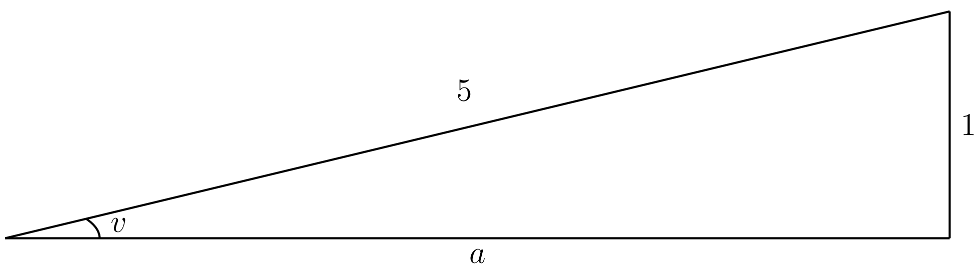
$$\begin{aligned} \sin v &= \frac{b}{c}, & \cos v &= \frac{a}{c}, \\ \tan v &= \frac{b}{a}, & \cot v &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Alltså kan vi använda en sådan triangel och via Pythagoras räkna ut till exempel $\sin v$ om vi känner $\cos v$. Hur då?

Exempel

Om $\sin x = 1/5$ och $0 < x < \pi/2$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Eftersom x ligger mellan 0 och $\pi/2$ så kan vi använda en hjälptriangel.



Pythagoras medför att $a^2 = 5^2 - 1^2 = 24$, så $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (givet att $a > 0$). Alltså kan vi direkt säga att $\cos x = \dfrac{a}{c} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ och $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1/5}{2\sqrt{6}/5} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Svar: $\cos x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ och $\tan x = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Exempel

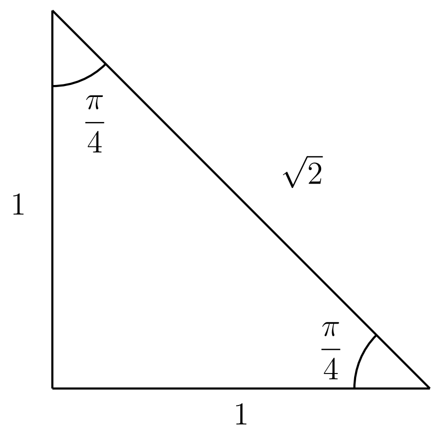
Om $\sin x = 1/5$ och $\pi/2 < x < \pi$, vad är $\cos x$ och $\tan x$?

Lösning. Är det samma svar som ovan? Observera att längderna i en hjälptriangel måste ha positiv storhet! Dvs att $a, b, c > 0$.

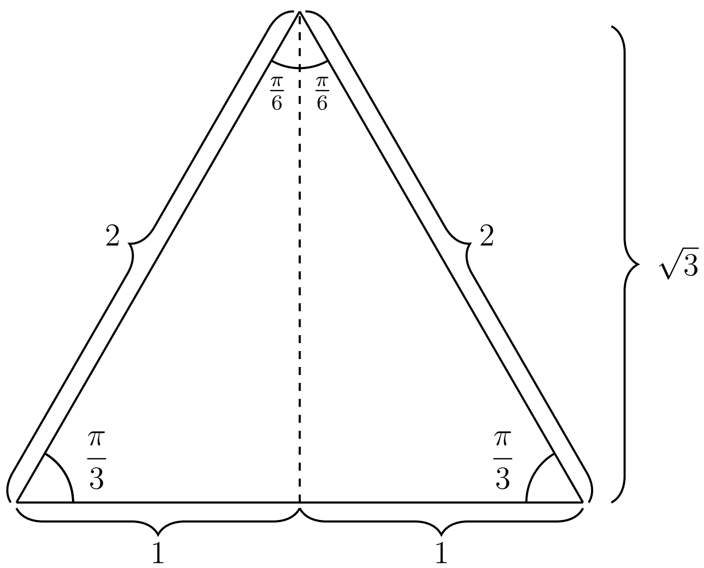
3.1 Standardvinklar

I en rätvinklig triangel med samma katetlängd (till exempel 1, men båda kateterna av längd 2 eller $\sqrt{731}$ går också bra) så är en vinkel (den räta) $\pi/2$ medan de andra två måste vara lika stora, så $\pi/4$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4} &= \sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



Om vi istället konstruerar en likbent triangel där alla sidor är lika långa (till exempel 2) så måste alla ingående vinklar vara lika stora, dvs $\pi/3$. Om vi delar triangeln i två lika stora delar från ett hörn till mitten på motstående sida så uppstår två rätvinkliga trianglar enligt figuren nedan.



Ur denna triangel kan vi utläsa att

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Minnesregel

En minnesregel för att komma ihåg standardvinklarna kan sammanfattas i denna tabell.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(v)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

4 Additionsformlerna

Additionsformlerna

$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \sin(u-v) &= \sin u \cos v - \cos u \sin v \\ \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ \cos(u-v) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v\end{aligned}$$

Det räcker att visa en av dessa likheter, resten följer av enkla trigonometriska samband vi redan känner till. Bevisen kan återfinnas i boken. Det finns ett par särskilt intressanta specialfall, till exempel formler för dubbla vinkeln:

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x \quad \text{och} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

och omvänt

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{och} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Dessa formler är mycket användbara när det gäller att lösa trigonometriska ekvationer och — som ni kommer att se — även när ni skall integrera vissa uttryck i envariabelanalysen! Tangens då? Jodå, via formlerna ovan kan vi ställa upp följande samband (visa det!).

Additionsformel för tangens

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} \quad \text{och} \quad \tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}.$$

Exempel

Finn det exakta värdet för $\tan \dfrac{\pi}{12}$.

Lösning. Tricket här är att försöka dela upp vinkeln som en summa av kända standardvinklar. Således,

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

och därmed måste

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^2.$$

Exempel

Lös ekvationen $\cos 2x + 2\sin x - 2\sin x \cdot (1 - \cos 2x) = 1$.

Lösning. Exemplet kanske ser lite avskräckande ut, men vi försöker oss på att skriva om med lite trig-ekvationer och se om det trillar ut något enklare. Ett tips är att försöka se till att man bara har en "sorts" trigonometrisk funktion i uttrycket. Vi vet att $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, så ekvationen är ekvivalent med

$$1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - 2\sin x \cdot (2\sin^2 x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0.$$

Om vi låter $t = \sin x$ (för att enklare se vad vi arbetar med) så ser vi att

$$4t^3 + 2t^2 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t(2t^2 + t - 1) = 0.$$

Så $t = 0$ är en lösning. Vi faktoriserar andragradaren:

$$2t^2 + t - 1 = 2(t^2 + t/2 - 1/2) = 2((t + 1/4)^2 - 9/16) = 2(t + 1)(t - 1/2),$$

så de övriga lösningarna ges av $t = -1$ och $t = 1/2$. Vi har alltså tre olika fall.
Fall 1: Om $t = 0$ så är

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n\pi.$$

Fall 2: Om $t = -1$ så är

$$\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Fall 3: Om $t = 1/2$ så är

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

Svar: $x = n\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, där $n \in \mathbf{Z}$.
Vad hade hänt om $t = 2$ dök upp som lösning? Eller om $t = 1/3$?