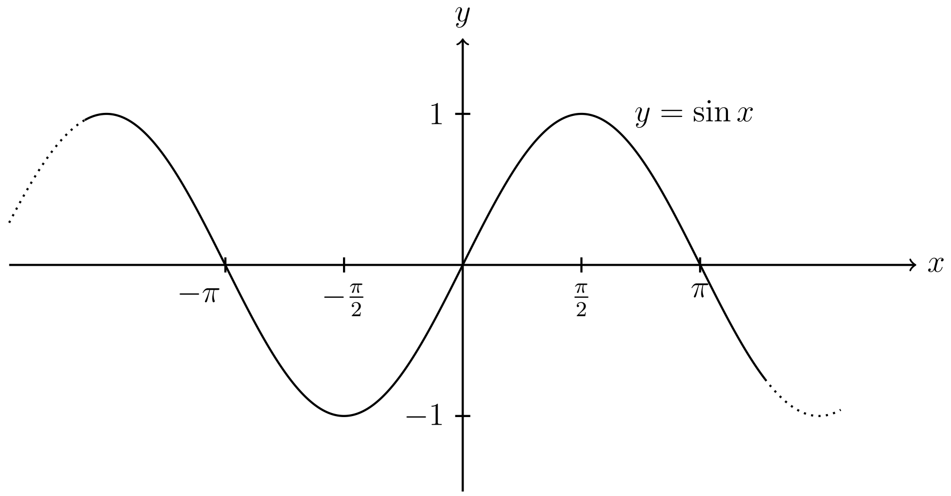
Föreläsning 8: Arcusfunktioner och hjälpvinkelmetoden

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

16 augusti 2022

1 Inverser till trigonometriska funktioner

Om vi ritar upp funktionen $y = \sin x$ ser vi följande:



Självklart går det inte att hitta en invers till $\sin x$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Det finns ju uppenbarligen oändligt många möjliga val för x för varje y mellan -1 och 1. Men om vi väljer ut en mindre definitionsmängd då?

Till exempel är $y = \sin x$ inverterbar då $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ eftersom sinus är strängt växande på det intervallet (se figuren, viss argumentation nödvändig för att visa det mer explicit). Ett algebraiskt bevis kan konstrueras med hjälp av additionsformlerna

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \quad \text{och} \quad \sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

eftersom det följer att

$$\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v$$

så om $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$ är

$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2 \sin \underbrace{\left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)}_{0<\cdot<\pi/2} \cos \underbrace{\left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)}_{-\pi/2<\cdot<\pi/2} > 0$$

ty $\sin(v) > 0$ om $0 < v < \pi/2$ och $\cos v > 0$ om $-\pi/2 < v < \pi/2$.

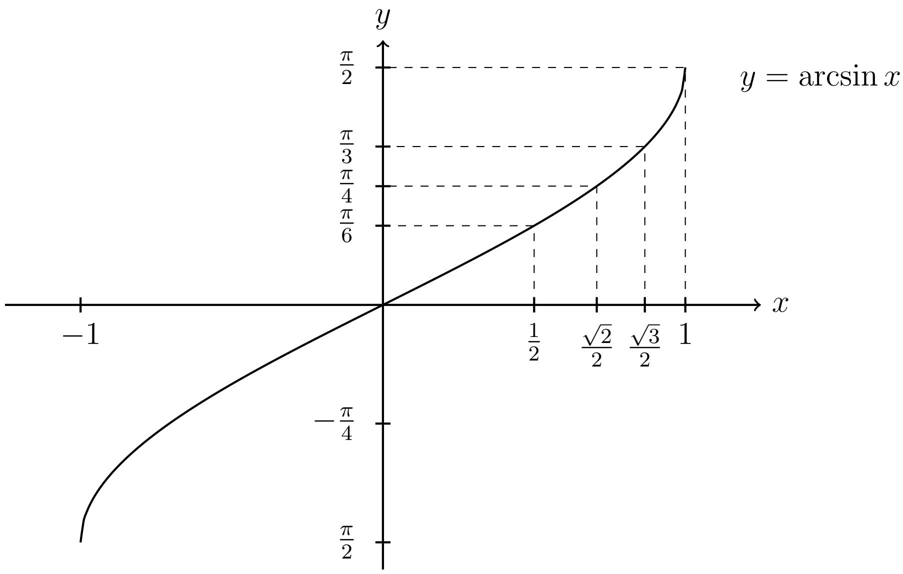
arcsin

Definition. $y = \arcsin x$ är det tal y så att $\sin y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arcsin}} = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Observera även följande:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, \qquad & -1 \leq x \leq 1, \\ \arcsin(\sin x) &= x, \qquad & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Till exempel, om $x > \pi/2$ eller $x < -\pi/2$ gäller alltså inte $\arcsin(\sin x) = x$. Var försiktig med detta!



Exempel

Lös ekvationen $\sin x = \dfrac{2}{5}$ där $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lösning. Vi ser att $2/5$ inte kommer från någon standardvinkel vi känner igen, så **en** lösning till ekvationen $\sin x = 2/5$ ges av $x = \arcsin(2/5)$. Hur hittar vi alla lösningar? Precis som vi gjort tidigare! Vi vet att

$$\sin x = \frac{2}{5} = \sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi \text{ eller } x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi.$$

Detta är alltså samtliga lösningar. Vilka uppfyller kravet i formuleringen? Vi behöver ha en uppfattning om hur stor $\arcsin\left(\dfrac{2}{5}\right)$ är. Ur figuren ovan kan vi se att $0 < \arcsin\left(\dfrac{2}{5}\right) < \dfrac{\pi}{4}$ eftersom $0 < \dfrac{2}{5} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Fall 1. Om $x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \leq 0$ inte fungerar. Om $n = 1$ blir uttrycket för stort, så här hittar vi inga lösningar i rätt intervall.
Fall 2. Om $x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2n\pi$ så ser vi direkt att $n \neq 0$ gör x för stor respektive för liten. Men $n = 0$ fungerar, ty då måste $3\pi/4 < x < \pi$ vilket uppfyller villkoret i uppgiften.
Svar: $x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$.

Exempel

Förenkla $\arcsin\left(\sin\left(\frac{71\pi}{10}\right)\right)$.

Lösning. Vi ser att

$$\frac{71\pi}{10} = \frac{70\pi + \pi}{10} = 6\pi + \pi + \frac{\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{71\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\pi - \left(\pi + \frac{\pi}{10}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right),$$

så då $-\pi/2 < -\pi/10 < \pi/2$ följer det att

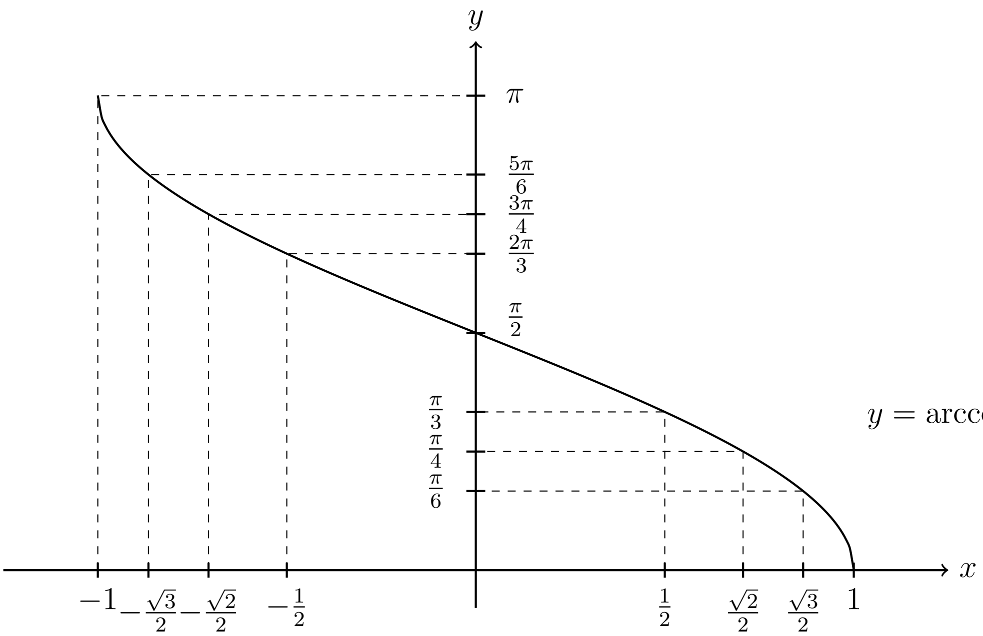
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{71\pi}{10}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

Svar: $-\frac{\pi}{10}$.

arccos

Definition. $y = \arccos x$ är det tal y så att $\cos y = x$ och $0 \leq y \leq \pi$.

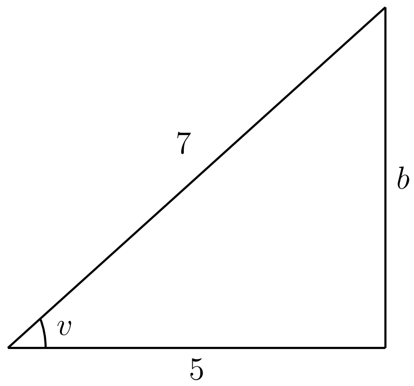
Vi noterar att $D_{\text{arccos}} = [-1, 1]$ och att $V_{\text{arccos}} = [0, \pi]$.



Exempel

Förenkla $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right)$.

Lösning. Låt $v = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$. Eftersom $0 < 5/7 < 1$ så måste $0 < v < \frac{\pi}{2}$ (titta i figuren ovan!). Vi kan alltså använda en rätvinklig triangel.



Pythagoras implicerar att

$$b = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$$

och därmed erhåller vi att

$$\sin v = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Alternativ: vi kan använda trigonometriska ettan. Låt $v = \arccos\frac{5}{7}$. Då är

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \left(\cos\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}.$$

Alltså är $\sin v = \pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$. Plus eller minus? Eftersom $0 < v < \pi/2$ så måste sinus vara positiv (titta i enhetscirkeln!).

Svar: $\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{7}\right)\right) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Ett lite krångligare exempel? Visst! Detta är en gammal duggauppgift (där det dök upp ganska många kreativa svar).

Exempel

Förenkla $\frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)}$.

Lösning. Vi börjar med nämnaren:

$$v_1 = \arccos(\cos 7) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos v_1 = \cos 7, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v_1 = \pm 7 + 2\pi n, \\ 0 \le v_1 \le \pi, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad v_1 = 7 - 2\pi.$$

På samma sätt kan täljaren skrivas

$$v_2 = \arcsin(\sin 3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \sin v_2 = \sin 3, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} v_2 = 3 + 2\pi n \text{ eller } v_2 = \pi - 3 + 2\pi n, \\ -\pi/2 \le v_2 \le \pi/2, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med att $v_2 = \pi - 3$. Följaktligen får vi

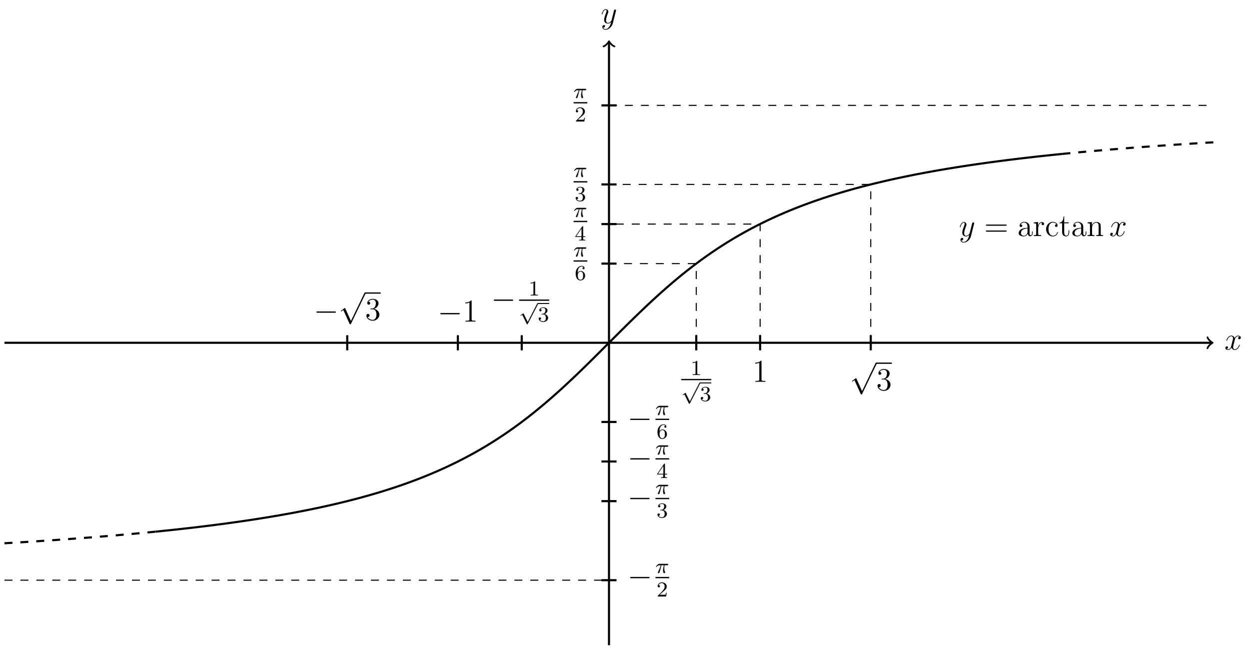
$$\frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 7)} = \frac{\pi - 3}{7 - 2\pi}.$$

Svar: $\frac{\pi - 3}{7 - 2\pi}$.

arctan

Definition. $y = \arctan x$ är det tal y så att $\tan y = x$ och $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Vi noterar att $D_{\text{arctan}} = \mathbf{R}$ och att $V_{\text{arctan}} = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.



Exempel

Förenkla $\arctan(2) + \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Lösning. Låt $v = \arctan 2 + \arccos(-4/5)$. Eftersom

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

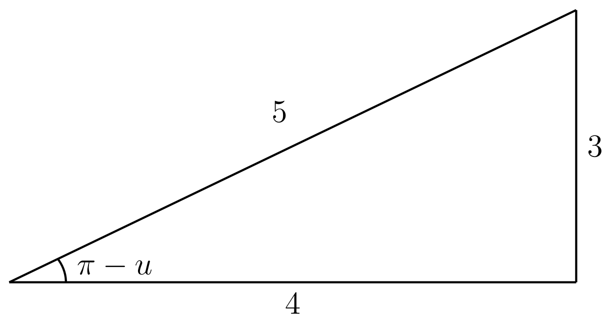
kan vi skriva

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arccos(-4/5))}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arccos(-4/5))}.$$

Vi ser att $\tan(\arctan 2) = 2$, men $\tan(\arccos(-4/5))$ är lite värre. Låt $u = \arccos(-4/5)$. Då är $\cos u = -4/5$ och $0 \le u \le \pi$. Minustecknet är lite obehagligt, så vi skriver

$$\cos u = -\frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi - u) = \frac{4}{5}.$$

En rätvinklig triangel med katetlängderna 4 och 3 ger att $\tan(\pi - u) = \dfrac{3}{4}$, så $\tan(u) = -\dfrac{3}{4}$ (vilket man kan se t ex från additionsformeln ovan). Försök absolut **inte** att rita en rätvinklig triangel där en vinkel är u. Eller försök förresten för all del. Vad händer?



Vi kan nu räkna ut $\tan v$:

$$\tan v = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 - 2(-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Alltså måste $v = \arctan(1/2) + n\pi$ för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$0 < \arctan\frac{1}{2} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{2\pi}{3} = \arccos\big(-\frac{1}{2}\big) < \arccos\big(-\frac{4}{5}\big) < \arccos(-1) = \pi.$$

Här har vi använt att arctan är växande, arccos är avtagande och kända standardvinklar. Alltså är

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < v < \pi + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom $0 < \arctan(1/2) < \pi/4$ så följer det att $n = 1$ är nödvändigt. Alltså blir den sökta vinkeln $v = \pi + \arctan(1/2)$. Med hjälp av en miniräknare eller dator kan man så klart enkelt få fram närmevärden och genom det bestämma n.

Svar: $\pi + \arctan\dfrac{1}{2}$.

2 Fasvinkelomskrivning (hjälpvinkel-)

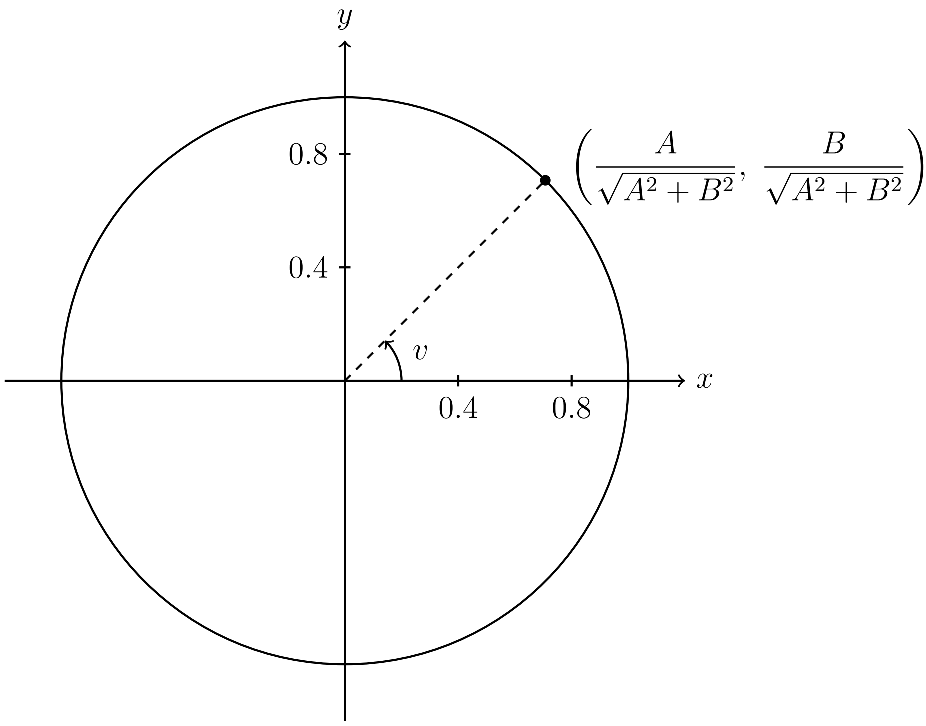
Summor (linjärkbominationer) av sinus och cosinus med samma frekvens kan skrivas som en enda term. Vi skriver om så att vi kan använda additionsformeln för sinus (går lika bra att göra motsvarande för cosinus om så önskas). Vi bryter ut så att koefficienterna framför $\sin x$ och $\cos x$ utgör koordinater för en punkt på enhetscirkeln:

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos v \sin x + \sin v \cos x) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+v), \end{aligned}$$

där v är **en** vinkel så att

$$\cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{och} \qquad \sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Det finns alltid oändligt många sådana val, men oftast räcker det för oss att hitta ett.



Vi introducerar också att $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ för att underlätta notationen. Så hur utför vi detta i praktiken? Normalt sett så utgår vi helt enkelt för additionsformeln för den trigfunktion vi ämnar använda. Låt oss betrakta ett exempel.

Exempel

Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = \sqrt{6}$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning.
Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(2x+v)$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = C\left(\sin 2x \cos v + \cos 2x \sin v\right) = C\sin(2x+v).$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/4$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -3, \\ C\cos v &= \sqrt{3}. \end{cases}$$

I princip identifierar vi alltså bara koefficienterna framför $\cos 2x$ respektive $\sin 2x$. För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 12.$$

Alltså är $C = \sqrt{12}$ ett lämpligt **val**, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \\ \sin v &= -\frac{3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi **väljer** $v = -\pi/3$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{12}\sin(2x+v) = \sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x+v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + v = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \\ 2x + v = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{24} + n\pi \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{13\pi}{24} + n\pi$$

för $n \in \mathbf{Z}$.
Svar: $x = \dfrac{7\pi}{24} + n\pi$ eller $x = \dfrac{13\pi}{24} + n\pi$ för $n \in \mathbf{Z}$.

3 Udda och jämna funktioner

En sak som ni kanske reflekterat över när vi arbetat med trigonometriska funktioner är egenskaper som att $\cos(-x) = \cos(x)$ och $\sin(-x) = -\sin(x)$. Vi har sett att cos beter sig som en kvadratisk funktion (alltså $y = x^2$) och sin som $y = x$ i denna mening, när vi endast betraktar tecken. Funktioner som beter sig på detta sätt har en hel del trevliga egenskaper så låt oss göra en definition.

Udda och jämn funktion

Definition. En funktion f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D_f$. En funktion f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$.

Exempel

(i) Funktionerna 1, $4 + x^2$, $\cos x$, $\ldots$, är jämna.

(ii) Funktionerna x, x^3, $\sin x$, $1/x$, $\ldots$, är udda.

Observera att en funktion f varken behöver vara udda eller jämn. De flesta funktioner är varken eller. Till exempel $f(x) = 1 + x + x^2$. Rita figur! Däremot går det alltid att dela upp en funktion i en summa av en udda och en jämn funktion:

$$f(x) = f_u(x) + f_j(x),$$

där till exempel $f_u(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ och $f_j(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$. Ibland kan det vara mycket användbart att bryta ned en funktion på detta sätt.
Notera även att en jämn funktion inte kan vara injektiv om både x och $-x$ tillhör definitionsmängden för något $x \neq 0$.