Föreläsning 10: Hyperboliska funktioner och sammansatta övningar

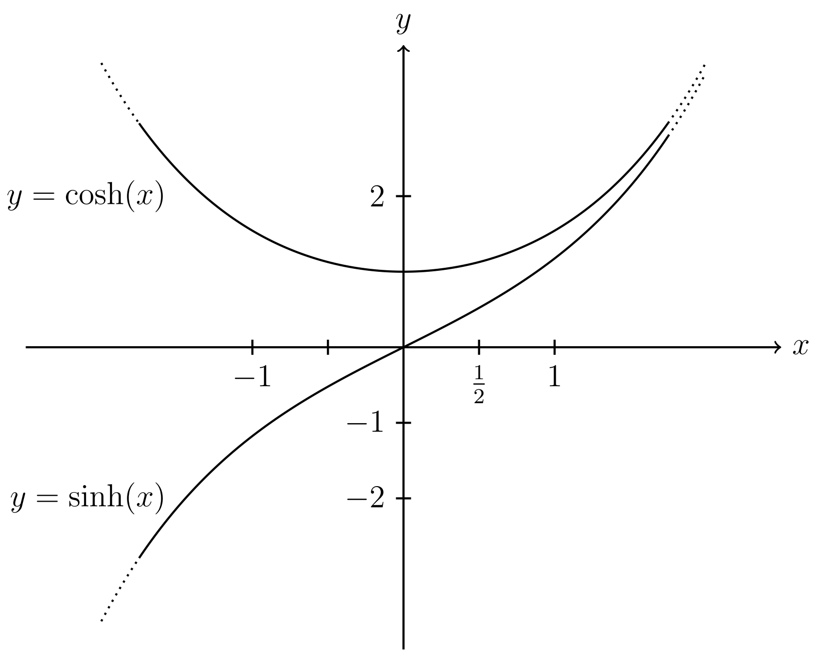
Johan Thim (johan.thim@liu.se)

16 augusti 2022

Syftet med denna föreläsning är att introducera de hyperboliska funktionerna och att visa hur de olika momenten i kursen används för att lösa problem som kanske är lite mer omfattande än tidigare exempel. Det handlar alltså inte enbart om repetition även om det blir en del av effekten.

1 $\cosh(x)$ och $\sinh(x)$

Definiera funktionerna $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ för $x \in \mathbf{R}$ (dessa kallas för de hyperboliska cosinus- och sinusfunktionerna).



Notera att *ingen* av dessa kurvor är hyperblar. Dessa objekt dyker upp på grund av följande likhet.

Exempel

Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (den hyperboliska ettan).

Lösning. Vi förenklar:

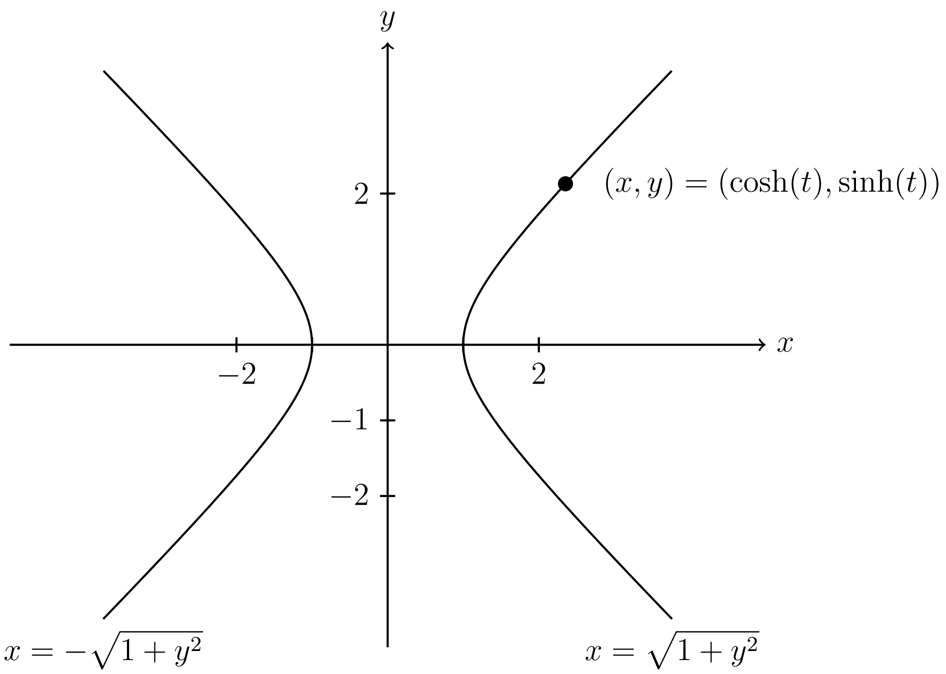
$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1,\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

En hyperbel är en kurva som uppfyller en ekvation av typen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

för reella konstanter a och b. Dessa hänger ihop med de hyperboliska funktionerna genom följande manöver. Låt $x = \cosh(t)$ och $y = \sinh(t)$ för $t \in \mathbf{R}$. Då kommer punkten (x, y) i planet att ligga på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ (så en hyperbel med $a = b = 1$).



Exempel

Undersök om $\cosh x$ och $\sinh x$ är inverterbara funktioner och ange om möjligt inverserna.

Lösning. Eftersom cosh är en jämn funktion saknar den en invers (med $\mathbf{R}$ som definitionsmängd). Att cosh är jämn kan enkelt ses ur definitionen då

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x.$$

Däremot verkar det möjligt att sinh är inverterbar, så vi försöker därmed att finna ett uttryck för en eventuell invers:

$$\begin{aligned} y = \sinh x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^x - y\right)^2 = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Det verkar nu finnas två möjligheter: $e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}$. Men, eftersom

$$\sqrt{1+y^2} > |y|$$

så blir högerledet negativt om vi väljer minus-lösningen. Detta är omöjligt eftersom vänsterledet alltid är positivt (varför?). Således måste

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Vi har alltså endast ett alternativ, och därmed har vi visat att $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Svar: $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Funktionen cosh saknar invers.

Exempel

Lös ekvationen $4\sinh x - 3\cosh x = 3$.

Lösning. Vi ser att

$$\begin{aligned} 4\sinh x - 3\cosh x = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(e^x - e^{-x}) - \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^x - \frac{7}{2}e^{-x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x - \frac{7}{2} = 0 \end{aligned}$$

Låt $t = e^x > 0$. För $t > 0$ så är

$$\frac{1}{2}t^2 - 3t - \frac{7}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 6t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \pm 4.$$

Alltså ges den enda lösningen av $x = \ln 7$ eftersom $t = -1 < 0$.

Svar: $x = \ln 7$.

2 Arcusar!

Exempel

Lös ekvationen $(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Lösning. Låt $x \in [-1, 1]$ och $v = \arcsin x$. Vi visar att $v = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Enligt definition vet vi att $\sin v = x$ och $-\pi/2 \le v \le \pi/2$. Vidare,

$$x = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

och då $0 \le \pi/2 - v \le \pi$ måste $\pi/2 - v = \arccos x$. Med andra ord har vi visat att

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konjugatregeln medför nu att

$$(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = (\arccos x + \arcsin x)(\arccos x - \arcsin x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right).$$

Detta uttryck skall vara lika med $-\pi^2/12$, så

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right) = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

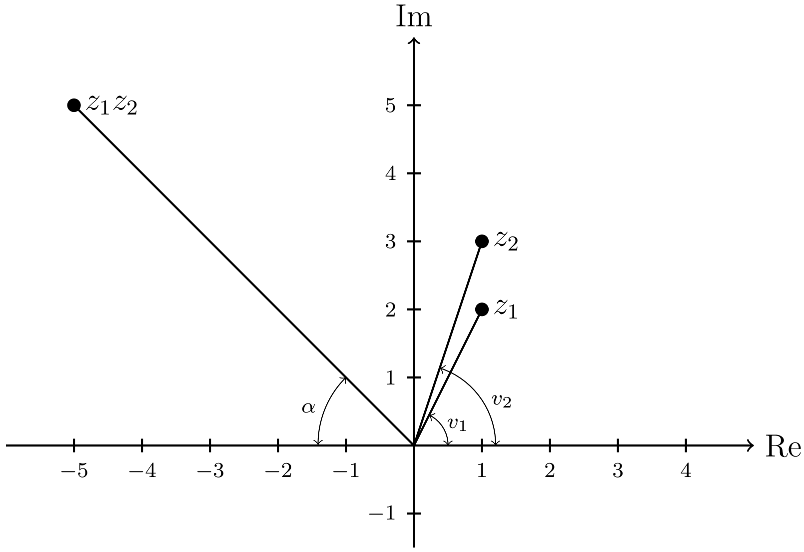
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa punkter ligger i första kvadranten. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i\arctan 3},$$

ser vi att $z_1z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Men, vi vet också att $z_1z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan \alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan z_1z_2 och (positiva) real-axeln, där $z_1z_2 = \sqrt{50}e^{iv_3}$. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är strängt växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. **OBS: Ett svar!**

En favorit i repris? Varför inte.

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Lösning: Som i förra exemplet låter vi $z_1 = 1 + 2i$ och v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln så att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2.$$

En lösning till ekvationen ges av $\arctan 2$. När det gäller den andra vinkeln så observerar vi att

$$\begin{aligned}
\exp\left(i \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) &= \cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + i \sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) \\
&= -\frac{4}{5} + i\sqrt{1 - \left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)^2} \\
&= -\frac{4}{5} + i\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5},
\end{aligned}$$

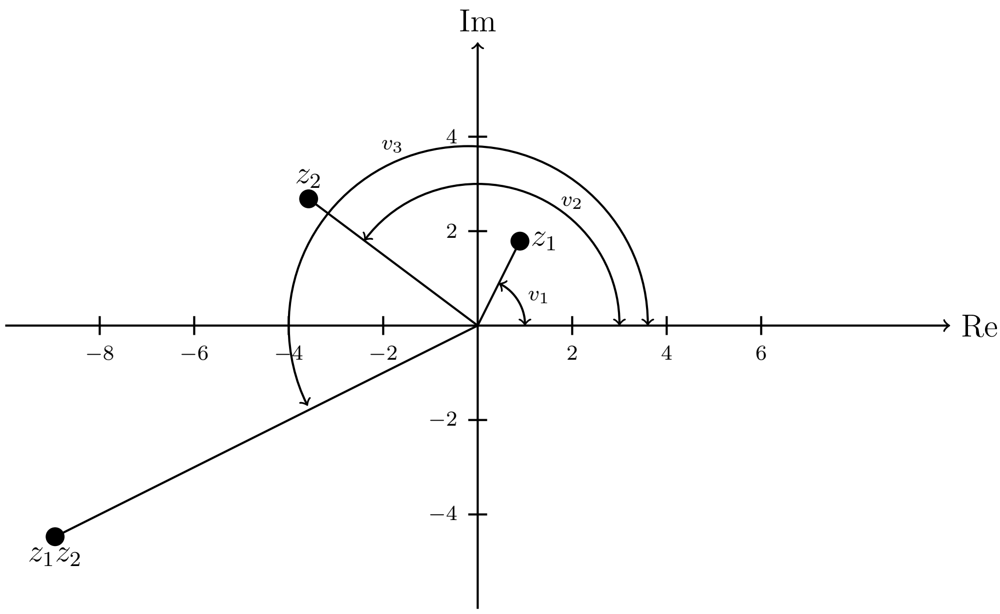
där det blir plus-tecken framför kvadratroten eftersom $\sin v_2 > 0$. Låt nu $z_2 = -4 + 3i$ (vi multiplicerar med 5 för att slippa bråken). På polär form kan vi nu skriva

$$z_1 = \sqrt{5} \exp\left(i \arctan 2\right) \qquad \text{och} \qquad z_2 = 5 \exp\left(i \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right),$$

ser vi att $z_1 z_2 = 5\sqrt{5} \exp\left(i(\arctan 2 + \arccos(-4/5))\right)$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(-4 + 3i) = -10 - 5i$. Vi har följande illustration:



Alltså blir $v_3 = \pi + \arctan(1/2)$ vinkeln mellan z_1z_2 och (positiva) real-axeln (i positiv led), där $z_1z_2 = 5\sqrt{5}e^{iv_3}$. Detta medför att

$$\arg(z_1z_2) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Ekvationerna (4) och (5) implicerar att

$$\arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

för något heltal n. Vidare vet vi att

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \pi,$$

så

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \frac{3\pi}{2}.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (6).

Svar: $\pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

4 En trigonometrisk identitet

Exempel

För vilka x gäller att $2(1 - \cos x)\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx + \sin x - \sin(n+1)x$ för alla positiva heltal n?

Lösning. Vi börjar med att försöka räkna ut summan. Via definitionen av e^{ix} kan vi skriva

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

Summan vi nu tar imaginärdelen av är en geometrisk summa med kvoten e^{ix}. Vi räknar ut denna:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = -1 + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}},$$

där vi har förlängt med konjugatet. Likheten gäller så länge $e^{ix} \neq 1$. Nämnaren kan skrivas om som $2 - 2\cos x$, och vi erhåller då

$$\operatorname{Im}\left(-1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}}\right) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x - \sin x}{2(1 - \cos x)}.$$

Alltså måste

$$2(1 - \cos x) \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx - \sin(n+1)x - \sin x$$

såvida inte $e^{ix} = 1$. Men detta händer precis då $x = 2k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$, och då är $\cos x = 1$ och alla sinus-termer i vänsterledet lika med noll. Likheten gäller alltså även då. Vi har nu visat att likheten gäller för alla $x \in \mathbf{R}$.

Svar: alla $x \in \mathbf{R}$.

5 Ett max/min-problem

Exempel

Avgör var $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x}{8}$ har sitt största respektive minsta värde och ange vad maximum och minimum blir.

Lösning. Först skriver vi om uttrycket lite för att få något enklare att arbeta med. Som bekant kan summor av sin och cos skrivas om med en hjälpvinkel om de har samma frekvens. Vi försöker med detta:

$$\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\right).$$

Vi bryter ut $C = 2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ för att garantera att vi kan hitta en lämplig punkt på enhetscirkeln.

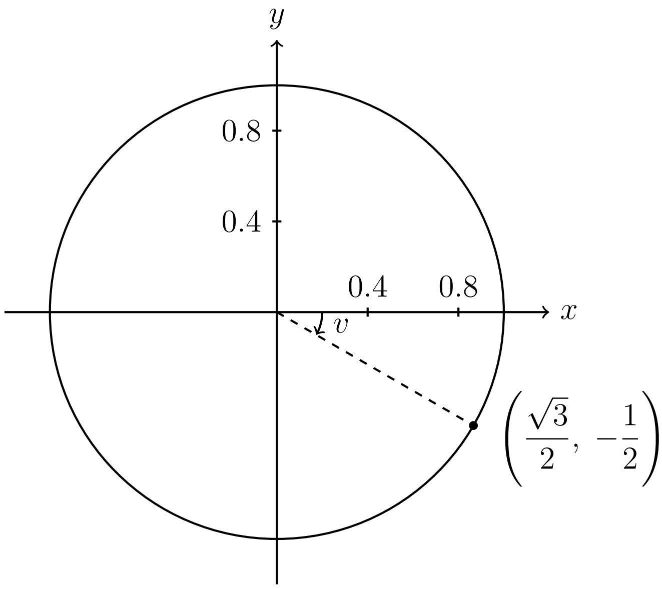
Eftersom

$$C\sin(3x+v) = C\left(\sin 3x\cos v + \cos 3x \sin v\right)$$

så kan vi identifiera att

$$\begin{cases} \sin v &= -1/2, \\ \cos v &= \sqrt{3}/2. \end{cases} \tag{7}$$

I figuren till höger ser vi att den punkt som motsvarar v ligger i fjärde kvadranten. Dessutom ser vi att det rör sig om en standardvinkel. Samtliga vinklar som uppfyller (7) ges av $v = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Vi **väljer** $v = -\dfrac{\pi}{6}$.



Alltså har vi visat att $f(x) = \dfrac{1}{4}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Det är således klart att största värdet blir $1/4$ och minsta $-1/4$, vilket inträffar precis då

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z},$$

respektive

$$3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: Maximum blir $1/4$ då $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; Minimum blir $-1/4$ då $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Exempel

Med $f(x)$ från förra exemplet och D_f givet av $-\pi \le 9x \le 2\pi$, undersök om f har en invers f^{-1} och ange om möjligt ett uttryck för inversen.

Lösning. Vi försöker nu bestämma inversen:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad 4y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Rightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \arcsin 4y \text{ eller } \pi - \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi = \arcsin 4y \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Möjligheterna ges således av

$$x = \underbrace{\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\arcsin(4y)}_{\in\left[\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[-\frac{\pi}{9},\ \frac{2\pi}{9}\right]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{8}$$

eller

$$x = \underbrace{\frac{7\pi}{18} - \frac{1}{3}\arcsin(4y)}_{\in\left[\frac{7\pi}{18}-\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{18}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[\frac{2\pi}{9},\ \frac{5\pi}{9}\right]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{9}$$

Nu vet vi att $-\dfrac{\pi}{9} \le x \le \dfrac{2\pi}{9}$ och då måste $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{1}{3}\arcsin 4y$. Varför? Vi ser att endast $n = 0$ är möjlig i (8). I (9) hittar vi endast enstaka ändpunkter som hamnar rätt (om $n = 0$ eller $n = -1$).

För övriga $n \in \mathbf{Z}$ blir det utanför sökt intervall. I de punkter som finns i båda fallen får vi samma värde på x.

Svar: $f^{-1}(y) = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{1}{3}\arcsin 4y$.

6 Det är roligt med inverser

Exempel

Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för $f^{-1}(x)$ om $f(x) = \dfrac{\pi + 4\arcsin x}{\pi - 4\arcsin x}$.

Lösning. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 \right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} \quad &\Leftrightarrow \quad y\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{y-1}{y+1}\right)$.