

Grunklagets bästa studietips

Hej allihopa!

Vi heter Fredrik, Johan och Micke och vi kallar oss Grunklaget eftersom vi är examinatorer och föreläsare i den Matematiska Grundkursen vid universitetet i Linköping.

För ett antal år sedan var vi alla i samma situation som du är nu (20 år sedan för den yngste av oss, drygt 30 år sedan för den äldste), d v s vi hade just börjat studera matematik på universitetet. Efter alla dessa år av egna studier, forskning, undervisning och kursadministration har vi samlat på oss en hel del erfarenhet vad gäller matematikstudier och vi tänkte nu dela med oss av våra bästa studietips.

Många av dessa tips hade vi själva stor hjälp av i våra egna studier då vi fick dem från lärare och äldre studenter när vi själva var nybörjarstudenter. Andra tips har vuxit fram ur våra egna erfarenheter och från diskussioner med studenter och kollegor under denna tid.

Om föreläsningar

Föreläsningar är nog inte en undervisningsform du är van vid från tidigare skolgång och i början kan det vara svårt att hänga med. Följande tips hjälper dig att få ut maximalt av varje föreläsning.

- **Förbered dig!** Viktigaste orsaken till att det är svårt att hänga med och lätt att tappa tråden under en föreläsning är att det mesta som sägs är nytt. Inget konstigt. Föreläsningarna är ju till för att introducera nya begrepp, satser m m. Det du behöver göra för att hänga med bättre och få ut mer av föreläsningen är att se till att det som sägs inte är nytt!

Gör det därför till en vana att läsa igenom motsvarande kapitel i kursboken *innan* föreläsningen. Målet är inte att du ska lära dig stoffet, utan att du ska bekanta dig med det. Dyker det upp material från tidigare i utbildningen som du är osäker på, gå tillbaka och repetera.

Det är lämpligt att låta denna genomläsning ta ca 20-30 minuter.

Om du vet i förväg vilka begrepp som ska införas, vilka satser som ska bevisas och ungefär vad dessa används till är det mycket lättare att hänga med på föreläsningen. Precis som en bilförare som kollat upp färdvägen i förväg kan beundra den vackra naturen istället för att fokusera på GPS:en, kan du koncentrera dig mer på viktiga resonemang och detaljer i föreläsningen än om du måste lägga ner energi på att 'orientera' dig, alltså fundera på ytliga detaljer som 'Vilket begrepp infördes just?' eller 'Vad sa egentligen satsen vi just bevisar?'.
• **Anteckna själv under föreläsningen!** Både erfarenheten och vetenskapliga studier visar att vi får ut mer av ett undervisningspass ju mer aktivt vi arbetar och ju fler sinnen vi aktiverar. Om du antecknar själv *hör* du det föreläsaren säger, du *ser* vad som skrivs på tavlan, din hjärna *processar* detta genom att lagra det i arbetsminnet så att du kan *skriva upp* det du sett och hört, vilket kopplar in känsel och muskelminne.

Vi får ibland höra att det är bättre att inte anteckna eftersom man då kan 'fokusera på det föreläsaren säger'. Detta är dock att förstöra för sig själv. Föreläsningen blir säkert lugnare och trevligare om du inte antecknar, men du använder inte föreläsningstiden alls lika effektivt. Det blir också betydligt svårare att gå tillbaka och repetera saker du glömt om du förlitar dig på anteckningar andra skrivit och som du därför inte är lika insatt i som du skulle varit om du antecknat själv.

- **Efterarbete föreläsningen!** Du trodde väl inte att föreläsningen var över när föreläsaren avslutade den? Tvärtom, det är nu den börjar på riktigt!

Så fort som möjligt efter föreläsningen, när du fortfarande har den i någorlunda färskt minne (helst samma dag), sök upp en plats där du har lugn och ro omkring dig och börja detaljstudera både dina anteckningar och de kapitel i boken du läste igenom under dina förberedelser.

Gå igenom de resonemang som gjordes och se till att du förstår så många av dem som möjligt. Lägg särskilt märke till om samma saker görs på olika sätt i anteckningar och kursbok. Det är oftast mycket lärorikt att studera olika sätt att komma fram till samma sak.

Gå också igenom de (ofta kortfattade) räkneexempel som gjordes och fyll själv i de detaljer som eventuellt hoppades över. Anledningen till att föreläsare ofta gör räkneexemplen ganska skissartat är inte bara att spara föreläsningstid. Den viktigaste orsaken är just att du ska ha möjlighet att själv vara aktiv vid efterarbetet och inte 'komma undan' med att bara läsa igenom anteckningarna. På detta sätt får du ut maximalt även av efterarbetet.

Detta efterarbete bör ta minst lika lång tid som själva föreläsningen.

- **Repetera!** När du haft några föreläsningar är det nästan ofrånkomligt att tidigare föreläsningar börjar blekna i minnet. Då är det dags att repetera. Gå igenom anteckningar och kursbok igen och observera speciellt ämnen som avhandlas på mer än en föreläsning och notera hur teorin byggs upp stegvis. Lägg också märke till vilka resultat som bygger på varandra. Denna överblick är det lätt att missa om du inte repeterar aktivt.

Ett exempel från grunken är de komplexa talen. De införs på föreläsning 3 men återkommer flera gånger under kursen och varje gång dyker det upp nya användningsområden för dem. I kursen ser vi t ex kopplingar till trigonometri (komplexa exponentialfunktionen, Eulers formler), analytisk geometri (ekvationer för linjer och cirklar) och polynomekvationer.

Om lektioner

Lektionerna handlar mestadels om att lösa övningsuppgifter och detta arbetssätt är du säkert van vid från tidigare matematikstudier. Eftersom du kommer att fortsätta med detta här på universitetet bör du ställa dig frågan: 'Varför löser jag alla dessa övningsuppgifter?'

Ställd på detta sätt är svaret på frågan snudd på självklart. Vi löser en viss uppgift, inte för att det är viktigt att hitta 'rätt svar', utan för att vi kan lära oss något av uppgiften som vi har nytta av i andra sammanhang. För att få ut maximalt av lektionerna är det av yttersta vikt att du ser till att lära dig så mycket som möjligt av varje uppgift. Följande tips hjälper dig med detta.

- **Förbered dig!** Försök att räkna några av lektionsuppgifterna innan lektionen, t ex direkt efter att du efterarbetat motsvarande föreläsning. Klarar du uppgifterna är det bra, det betyder att du ligger väl till i kursen. Kör du fast är det också bra, då har du frågor att ställa till din lärare direkt när lektionen börjar. Du utnyttjar därmed lektionstiden mer effektivt.
- **Kör fast ibland!** Ja du läste rätt. Om du aldrig kör fast lär du dig ingenting då du räknar för enkla uppgifter. Att köra fast ibland är en förutsättning för att utvecklas i matematiken. 'Vad ska jag då göra när jag väl har kört fast?' undrar du kanske. Det första du ska göra är att fråga dig själv om du verkligen *har* kört fast eller om du har en idé som du kan testa. Var i så fall inte rädd för att testa den. Det värsta som kan hända är ju att idén inte fungerar och då är det bara att prova något annat. Att inte våga testa sina idéer, ofta med motiveringen att 'jag var inte säker på att idén skulle fungera', är tyvärr ett fel som många gör. Ramla inte i den fallgropen själv! Du bromsar i så fall din utveckling till ingen nytta. 'OK, nu har jag testat alla mina idéer och ingen funkade. Vad gör jag nu?' Dags att söka nya idéer! Gå igenom relevanta avsnitt i kursboken, anteckningarna och dina lösningar på tidigare uppgifter för att hämta idéer. Ställ dig frågor som: 'Finns det någon formel/omskrivning jag kan använda?', 'Går det att tillämpa någon av kursens satser?', 'Kan jag använda en idé från ett exempel i boken, föreläsningen eller från någon tidigare uppgift?'

Om du fortfarande inte ser hur du ska komma vidare är det dags att fråga din lärare. Försök att ställa en så specifik fråga som möjligt så att din lärare kan hjälpa dig att komma vidare utan att för den skull 'förstöra' resten av uppgiften.

- **Skriv fullständiga lösningar!** Med ovanstående arbetssätt är det lätt hänt att första lösningen till en övningsuppgift, trots att den leder fram till rätt svar, ändå inte ser riktigt bra ut. Den kanske innehåller ovidkommande räkningar från när du testade en idé som senare visade sig inte fungera, alla resonemang kanske inte är fullständigt utskrivna o s v.

Det ger mycket nyttig övning att skriva ner en ny lösning med fullständiga resonemang. På duggorna kommer du att avkrävas detaljerade lösningar med fullständiga resonemang och motiveringar och erfarenheten har visat att det inte är så lätt att frambringa sådana lösningar om man inte övat ordentligt på det under kursens gång.

Det är också en god idé att visa några lösningar för din lärare under kursens gång och samtidigt fråga om det är något du behöver göra bättre.

- **Utnyttja lektionerna!** De flesta matematikstudenter behöver ibland lite hjälp på traven. Det är därför lektionerna finns! Visserligen (se ovan) rekommenderar vi inte att du ber om hjälp så fort det tar emot lite grand, men minst lika viktigt är det att inte vänta för länge. Om du har suttit fast ett tag trots att du följt råden ovan, tveka inte att fråga.

Kanske tycker du det känns lite pinsamt att behöva fråga. Slå i så fall denna tanke ifrån dig med kraft! Vi kan gå ed på att de allra flesta av dina studiekamrater skulle behöva ställa åtminstone några frågor varje lektion. Om du föregår med gott exempel och ställer din fråga så är det i alla fall något vi lärare uppskattar. Vi är ju där för att svara på just dina frågor. Du gör dig själv en stor tjänst om du utnyttjar denna möjlighet.

En förutsättning för att få ut maximalt av lektionerna är förstås att du är där! De senaste åren har vi tyvärr sett en nedgång i närvaron på lektionerna och samtidigt har vi sett en försämring av resultaten på våra tentor. Det råder ingen tvekan om att dessa fakta är relaterade.

Det kan förstås finnas många olika anledningar till att man missar en lektion. Det vi vill be dig om är att *om* du behöver vara borta från en lektion, rannsaka dig själv och fråga dig om det verkligen är nödvändigt att missa lektionen. Om du då kommer fram till att det du ska göra istället faktiskt är viktigare än att gå på lektionen så må det vara hänt. Närvaro på undervisningen är trots allt frivillig. Räkna dock med att det tar längre tid att ta igen lektionen på egen hand än vad det skulle ha tagit att gå på den.

- **Kontrollera svar och delresultat!** Som sagt, det är viktigt att du lär dig så mycket som möjligt av varje uppgift. Stå därför emot impulsen att titta i facit och sedan hasta vidare till nästa uppgift så fort du hittat vad du tror är rätt svar på uppgiften du just räknat.

Fråga dig istället om du kan kontrollera ditt svar. Om du löst en ekvation kan du sätta in lösningarna i ursprungsekvationen och beräkna båda leden. Om det är lösningar du hittat ska ju leden bli lika. Bli de inte det har du tänkt fel någonstans och det är dags att felsöka.

Har du löst en olikhet blir antalet lösningar ofta oändligt så det är inte praktiskt genomförbart att sätta in *alla* de funna lösningarna i ursprungsolikheten, men du kan i alla fall sätta in några stycken och se efter om olikheten är uppfylld för de värden du satt in. Det kan också vara bra att sätta in några värden på den obekanta som *inte* är lösningar och kolla att olikheten *inte* är sann i dessa fall.

Själva frågeställningen kan också ge viktig information. Om det frågas efter ett avstånd och du fått ett negativt svar så vet du ju, utan att behöva titta i facit, att ditt svar inte stämmer.

Det är särskilt viktigt att du tillägnat dig detta arbetssätt innan du ska skriva dugga. Vi examinerer förutsätter nämligen att du gör den här typen av kontroller så om du svarat fel och felet kunde upptäckts med en kontroll får du oftast inga poäng på uppgiften, även om räknefelet i sig inte är så allvarligt. Vi ser det som ett allvarligt fel att slarva med kontrollerna.

- **Reflektera!** När du är klar med en uppgift, hasta inte omedelbart vidare till nästa utan stanna upp ett slag. Övningsuppgifterna är inte valda på måfå utan det finns en anledning till varför uppgiften är med i lektionsprogrammet.

Tänk igenom uppgiften en extra gång och fundera över vad uppgiften vill förmedla och vad som är viktigt att du tar med dig till senare uppgifter. Fundera över om det finns något annat

sätt att lösa uppgiften än det du hittat. Om du kommer på ett, lös gärna om uppgiften på detta sätt. Det finns mycket att lära sig på att lösa samma uppgift på flera olika sätt. Inte minst övar du upp din intuition för vilka angreppssätt som fungerar bra i vilka situationer; en färdighet som är omöjlig att läsa sig till och du bara kan lära dig genom erfarenhet.

- **Håll tempot!** Det kan lätt hända att du hamnar lite på efterkälken och inte är klar med föregående lektion när en ny lektion tar vid. Motstå då frestelsen att använda lektionstiden till att jobba ifatt! Risken är då stor att du på allvar kommer efter i kursen och då kan du inte utnyttja föreläsningar och lektioner lika effektivt. Det blir svårare att hänga med på genomgångar om läraren pratar om resultat och begrepp du ännu inte hunnit jobba med.

Bättre är att ägna så mycket lektionstid som möjligt åt det ordinarie lektionsprogrammet och istället jobba ifatt utanför lektionstid.

Om ämnet matematik

För framgångsrika studier i matematik är det viktigt att observera två egenskaper hos ämnet:

- **Matematik är hierarkiskt!** Detta betyder att nya saker i allmänhet bygger vidare på något du lärt dig tidigare. Vid första anblicken verkar det kanske som om detta gör ämnet svårt eftersom det kan vara förödande att glömma något, men vi ska se exempel på hur denna egenskap kan användas till att tvärtom *förenkla* dina matematikstudier.
- **Matematik är en färdighet!** Med detta menas att det inte räcker att du bara läser dig till teoretiska kunskaper för att bli bra på matematik (även om detta naturligtvis är en nödvändig förutsättning), utan det krävs också mycket övning. Detta är anledningen till att vi i undervisningen lägger så stor vikt vid lösning av övningsuppgifter.

En konsekvens av detta är att matematik inte är något man kan eller inte kan. Istället är matematik något som alla kan men som vi är väldigt olika bra på, beroende på hur mycket vi tränat och hur mycket av träningen vi lyckats ta till oss.

En användbar liknelse är med en fotbollsspelare. Visst har en fotbollsspelare nytta av en del teoretiska studier (regler, taktik, träningslära m m) men dessa studier kan inte ersätta riktig fotbollsträning. *Lika lite som det går att bli bra på att slå frisparkar genom att läsa om hur Zlatan bär sig åt, lika lite går det att bli bra på att lösa matematiska problem genom att titta på någon annans lösning.* Det egna övandet går inte att ersätta med någon annans.

Texten håller visserligen på att bli lite lång, men låt oss avsluta med att formulera några tips och råd utifrån dessa egenskaper.

- **Undvik utantillinläring!** Något många har svårt med i matematiken är att lära sig satser, definitioner, formler m m utantill. Visst kan utantillinläring vara ett bra *första* steg när du ska lära dig något nytt men för att inte överbelasta minnet är det viktigt att du kommer bort från utantillinläringen fortast möjligt. Här kommer matematikens hierarkiska struktur (se ovan) till undsättning. Det är lättare att minnas samband mellan begrepp än att memorera lösryckta fakta. Du tjänar alltså på att lära dig hur formler och satser hänger ihop istället för att lära dig dem utantill.

Vi illustrerar med ett exempel: Du har säkert stött på formlerna

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 && \text{(första kvadreringsregeln)} \\(x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 && \text{(andra kvadreringsregeln)} \\(x + y)(x - y) &= x^2 - y^2 && \text{(konjugatregeln)}\end{aligned}$$

Första gången man ser dessa är det en bra idé att lära sig dem utantill för att det ska gå smidigt att öva på dem, men i längden är detta inte en vinnande strategi. Observera istället att den första kvadreringsregeln bara är vanlig parentesmultiplikation:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x^2 + 2xy + y^2.$$

Andra kvadreringsregeln fås sedan ur den första genom att byta y mot $-y$:

$$(x - y)^2 = (x + (-y))^2 = x^2 + 2x \cdot (-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Konjugatregeln är också bara parentesmultiplikation (verifiera detta själv). Har du väl gjort dessa räkningar några gånger går det snabbt att mentalt återskapa dem vid behov och du behöver därmed inte längre aktivt memorera ovanstående formler.

Ett annat sätt att få formler att fastna är att försöka använda dem på oväntade sätt. Titta på uttrycket $4a + a^2b - 4a\sqrt{ab}$, där vi antar att $a, b \geq 0$. Kan du skriva om det på något sätt? Fundera en stund. Ett förslag kommer lite senare.

Figurer är ett kraftfullt verktyg för att förstå matematiska resultat (och därmed slippa memorera dem). Tag fram ett rutat papper och rita en ganska lång (t ex 13 rutor) vågrät sträcka. Markera en punkt P någonstans på sträckan. P kan egentligen sitta var som helst på sträckan, men figuren blir bäst om P sitter någorlunda långt från både mitten och ändarna. P delar nu sträckan i två delar. Kalla längderna av dessa delar x och y så att sträckans totala längd är $x + y$. Rita en kvadrat där din ursprungliga sträcka är en av sidorna. Dra en lodrät linje genom P . Denna skär motstående sida i kvadraten i en punkt Q och Q delar denna sida i två delar som också har längd x respektive y . Placera en punkt R på någon av de lodräta sidorna så att denna delas i två delar med längd x resp. y och dra en vågrät linje genom R . Denna skär fjärde sidan i en punkt S som delar fjärde sidan i två delar med längder x och y .

Du har nu ritat en stor kvadrat delad i fyra delar av olika form och storlek. Vad blir arean av den stora kvadraten? Å ena sidan har den sidan $x + y$ och arean $(x + y)^2$. Å andra sidan består den av en kvadrat med sidan x och arean x^2 , två rektanglar med sidorna x och y och arean xy och en kvadrat med sidan y och arean y^2 . Totala arean är därför $x^2 + 2xy + y^2$, varför $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Anledningen till att vi inte ritat denna figur själva är inte för att vi är lata utan för att (se ovan) figuren har större chans att fastna i ditt minne ju aktivare du varit när du studerat den. Att rita figuren själv och sedan titta på den och inse ovanstående är alltså överlägset att bara titta på en figur vi ritat åt dig.

$$\text{Förresten är } 4a + a^2b - 4a\sqrt{ab} = \left(2\sqrt{a} - a\sqrt{b}\right)^2.$$

Om du arbetar på detta sätt med andra avsnitt i dina matematikkurser kommer mängden stoff du behöver memorera att minska drastiskt. Som en kurskamrat till en av oss uttryckte det en gång när det begav sig: 'Det viktigaste om man ska bli bra på matematik är att vara för lat för att lära sig saker utantill'.

- **Chansa aldrig!** Om du jobbar med ett uttryck och inte är säker på vilka räknelagar du kan skriva om uttrycket med, är det livsviktigt att du inte chansar. Problemet är inte att du kanske gissar fel och därför får ut fel svar. Nej, problemet är att du kanske gissar rätt!

Gissar du rätt finns det nämligen en risk att du missar att här finns ett problem som måste åtgärdas. När du nästa gång hamnar i en liknande situation (t ex på duggan) tvingas du därför gissa igen och då finns det inga garantier för att du gissar rätt.

Istället för att chansa i ovanstående situation, ta för vana att gå tillbaka och repetera de räknelagar du var osäker på. Då förbättrar du din chans att klara nästa uppgift avsevärt.

Hoppas du får nytta av dessa tips, och lycka till med dina matematikstudier!

Grunklaget (Fredrik, Johan och Micke)