Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera injänade bonuspoäng till sin skringningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiga 9. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap), II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter.

(1) (a) Förenkla summan $\displaystyle\sum_{k=-5}^{40} 5\left(\frac{2}{7}\right)^k$ så långt det går. Eventuella potenser högre än fyra kan stå kvar i ditt svar.

(b) Räkna ut $\displaystyle\sum_{k=1}^{52} \frac{2k+1}{27}$.

(2) Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(3) (a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2}.$$

(4) Finn alla lösningar x till

$$2 + \log\left(\sqrt{1+x}\right) + 3\log\left(\sqrt{1-x}\right) = \log\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

(5) (a) Visa att

$$\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{\sin(3\theta)}{4}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Åtminestone för vinklar θ sådant att $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbf{Z}$, är en omskrivning av en dubbelvinkel formel

$$\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}.$$

Använd den för att bevisa

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}.$$

(6) Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad som

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (\text{for alla } x \in \mathbf{R})$$

är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

(7) Finn alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till $z^2 + (2-2i)z + (5-14i) = 0$.