Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera injänade bonuspoäng till sin skringningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiga 9. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap), II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter.

Kom ihåg notationen

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 A_2 \ldots A_n$$

för producten av talen $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1. (a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

   (b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2}.$$

2. Finn alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till

$$2 + \log\left(\sqrt{1+x}\right) + 3\log\left(\sqrt{1-x}\right) = \log\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

3. Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad som

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{(for alla } x \in \mathbf{R}\text{)}$$

   är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

4. (a) Betrakta polynomet $p(z) = z^n - 1$ (i den komplexa variabeln z) för något givet $n \in \mathbf{Z}_+$. Visa att

$$p(z) = (z-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)$$

   för alla $z \in \mathbf{C}$.

   (b) Ange och bevisa en formel för den geometriska summa

$$\sum_{j=1}^{n} ar^{j-1}.$$

För vilka värden av a och r gäller din formel? Fungera ditt bevis även för komplexa tal? Motivera ditt svar.

5. Vi har lärt oss att α är ett nollställe till ett polynom (i variabeln z) om och endast om polynomet är delbart med $(z-\alpha)$. Det gäller för polynom med komplexa koefficienter liksom för dem med reella koefficienter.

   Betrakta igen polynomet $p(z) = z^n - 1$ från uppgift 4(a).

   (a) Hitta alla komplexa nollställen till $p(z)$ i polär form.

   (b) Använd nollställena för att faktorisera $p(z)$ så långt det går (och därmed längre än i uppgift 4(a)).

   (c) Använd ditt svar på (b) och uppgift 4(a) för att visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right).$$

6. (a) Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\pi k}{n} = \frac{i\pi}{2}(n-1).$$

   (b) Använd räknereglar för den komplexa exponentialfunktionen och del (a) för att visa att

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi \frac{k}{n}} = (-i)^{n-1}.$$

7. (a) Visa att

$$\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = -\frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}(1 - e^{2\pi i \frac{k}{n}})$$

   och därför är

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right)\right).$$

   (b) Använd del (a), och uppgifter 6(b) och 5(c) för att visa att

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$