

Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter. Varje uppgift bedöms underkänd eller godkänd i varje lärandemål (I, II och III) och ges en heltsbedömning i poäng (0-3 poäng). För att få godkänt betyg krävs minst 9 poäng och godkänd på minst två uppgifter i vardera lärandemål. En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hjälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap) och II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter.

1. (a) Nedan finns en lista över olika steg man skulle kunna tänka genomföra i ett induktionsbevis. Välj ut stegen du behöver för att genomföra ett korrekt induktionsbevis av $P(n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, där $P(n)$ är ett påstående som beror på $n \in \mathbf{Z}_+$.
 - (i) Bevisa att $P(n) \implies P(n+1)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.
 - (ii) Bevisa att $P(n+1) \implies P(n)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.
 - (iii) Bevisa att $P(n)$ är sant för något jämnt $n \in \mathbf{Z}_+$.
 - (iv) Bevisa att $P(1)$ är sant.
 - (v) Anta att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
 - (vi) Genom att hänvisa till induktionsaxiomet, notera att vi har genomfört alla steg som behövs för ett fullständigt induktionsbevis, och därmed är bevisat att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
- (b) Ge ett induktionsbevis av formeln

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \quad (*)$$

där $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ är givna tal och $n \in \mathbf{Z}_+$.

2. Med hjälp av (*) bevisa att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (\dagger)$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Ett direkt induktionsbevis av ($\dagger$) ger noll poäng. Tips: Ta $a_k = 1/k$.

3. (a) Ange medelpunkt och radie för cirkeln som ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 = 2y - 7x.$$

- (b) Faktorisera polynomet

$$p(x) = 9x^3 - 3x^2 - 5x - 1$$

så långt som möjligt.

4. För vilka x är uttrycket

$$\sqrt{\frac{1 + \ln x}{6 \ln x}}$$

definierad?

5. (a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b .

- (b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

6. Logaritmen av a i basen b definieras enligt formeln

$$\log_b(a) := \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

för $a, b > 0$. Förenkla följande uttryck.

(a) $\log_2(18) + \log_2(24) - \log_2(54)$

(b) $\log_{a^2}(a^7)$ där $a > 0$

(c) $2^{\log_4(9)}$

7. (a) Skriv

$$z = \frac{6}{1 - i\sqrt{3}}$$

i polär form $z = re^{i\theta}$, där $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

- (b) Finn alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till

$$w^2 = -2 - \frac{3}{2}i.$$