Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter. Varje uppgift bedöms underkänd eller godkänd i varje lärandemål (I, II och III) och ges en heltsbedömning i poäng (0–3 poäng). För att få godkänt betyg krävs minst 7 poäng och godkänd på minst två uppgifter i vardera lärandemål. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap) och II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter. I uppgift 3 examineras III endast i del (b).

1. (a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

   (b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att
$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{8n-3}{6n} = \frac{4}{3}.$$

2. (a) Beräkna
$$\sum_{k=1}^{42} 2^{4-k}.$$

   (b) Beräkna
$$\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4}.$$

3. Betrakta följande påstående: Det finns inte positiva tal a och b som uppfyller att
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}.$$

   (a) Vilket av följande alternativ är negationen av påståendet? Du behöver inte motivera ditt svar.
      (i) För alla positiva tal a och b är $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.
      (ii) Det finns ett val av positiva tal a och b som uppfyller att $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.
      (iii) För alla positiva tal a och b är $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$.
      (iv) Om $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$ är a och b positiva tal.

   (b) Använd negationen för att ge ett bevis av påståendet.

4. Ge ett induktionsbevis av likheten
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

5. Betrakta polynomen
$$p(x) = x^{48} - 4^8 x^{40} + x^7 - 2^6 x^4 + x + 2$$
och
$$q(x) = x(x-4).$$
Beräkna resten $r(x)$ av $p(x)$ delat med $q(x)$.