Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns fem uppgifter. Varje uppgift bedöms underkänd eller godkänd i varje lärandemål (I, II och III) och ges en heltsbedömning i poäng (0–3 poäng). För att få godkänt betyg krävs minst 7 poäng och godkänd på minst två uppgifter i vardera lärandemål. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap) och II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter.

1. (a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

   (b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att
$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{14n-3}{7n} = 2.$$

2. (a) Beräkna
$$\sum_{k=1}^{42} 6 \times 3^{3-k}.$$

   (b) Beräkna
$$\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4}.$$

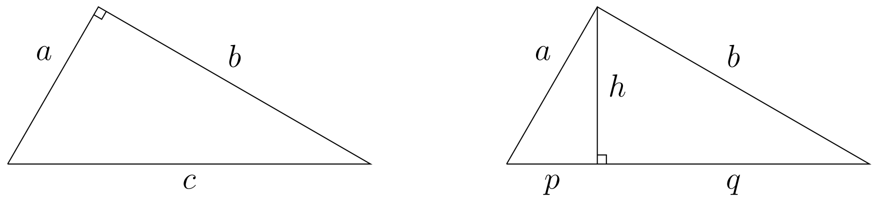
3. Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som ges av formeln $f(x) = x^4$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

   (a) Visa att
$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$
   för $x, y \in \mathbf{R}$ ~~och $n \in \mathbf{Z}_+$~~.

   (b) Använd del (a) för att visa att funktionen f är strängt växande på $[0, \infty)$.

4. I senare delar av kursen har vi använt oss av *Bernoullis olikhet*:
$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ och } x \geq -1.$$
   Beviset av den kräver inget mer kunskap än det vi lärde oss i först delen av kursen. Ge ett bevis av Bernoullis olikhet.

5. Betrakta en rätvinklig triangel med sidolängder a, b och c enligt bilden nedan till vänster.



I bilden ovan till höger har vi dragit ett sträck från det översta hörnet rakt ner så att det träffar hypotenusan i en rättvinkel. Benämna längden av sträcket h. På så sätt delas hypotenusan i två delar av längd p respektive q.

(a) I bilderna ovan syns tre olika rätvinkliga trianglar. Ange tre likheter som följer från Pythagoras sats.

(b) Två av de tre likheterna innehåller längden h. Plussa ihop dem för att bevisa

$$2h^2 = (a^2 + b^2) - (p^2 + q^2).$$

(c) Bevisa att

$$h^2 = pq.$$