Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter. Varje uppgift bedöms underkänd eller godkänd i varje lärandemål (I, II och III) och ges en heltsbedömning i poäng (0–3 poäng). För att få godkänt betyg krävs minst 9 poäng och godkänd på minst två uppgifter i vardera lärandemål. Om inget annat anges skall lösningarna vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

Lärandemål I (ämneskunskap) och II (riktighet och räknefärdighet) och III (kommunikation) examineras i alla uppgifter. I uppgift 3 examineras III endast i del (b).

1. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4}$$

med definitionsmängd $D = \{x \in \mathbf{R} \colon x \neq 4\}$.

(a) Visa, med till exempel ett motsägelsebevis, att det inte finns något $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$.

(b) Visa att det för varje reellt tal $y \neq 1$ finns (minst) ett $x \in D$ sådant att $f(x) = y$.

2. (a) Visa att lösningar $z \in \mathbf{C}$ till

$$|z - 3i| = 2|z|.$$

är en cirkel i det komplexa planet med medelpunkt $a + ib$ och radian r genom att visa ekvationen är ekvivalent med den kända kartesiska ekvationen för en cirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

där $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

(b) Ange medelpunkten och radian av cirkeln ovan.

3. (a) Finn alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till

$$z^6 = 3\sqrt{3} + 3i.$$

Ange lösningarna i polärform.

(b) Rita lösningarna i den komplexa planet.

4. Kom ihåg att

$$a^b = \exp(b \ln a)$$

för $a > 0$ och $b \in \mathbf{R}$ så därför är

$$a^b = t \iff b = \frac{\ln t}{\ln a} \quad \text{för positiva } a \neq 1.$$

(a) Hitta alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$(2^x - 1)(2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24) = 0.$$

(b) Finn alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till

$$\ln(1-x) + \ln(-1-x) = 2.$$

5. Kom ihåg från vårt grupparbete att

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

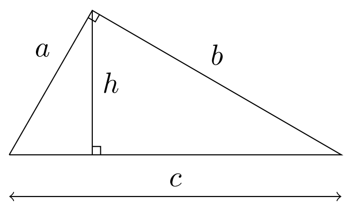
(a) Med hjälpa av sinus värdet ovan visa att

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

(b) Visa att

$$\sin\left(\frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}.$$

6. Betrakta en rätvinklig triangel med sidolängder a, b och c enligt bilden nedan.



I bilden har vi dragit ett sträck från det översta hörnet rakt ner så att det träffar hypotenusan i en rättvinkel. Benämna längden av sträcket h.

(a) Genom att betrakta sidan med längd c och sedan sidan med längd a som bas, räkna ut två olika formler för triangels area. Använd de för att visa att

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}.$$

(b) Använd del (a) och Pythagoras sats för att visa

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

7. (a) Visa att

$$\sin(2n\theta + 2\theta) = \sin(2n\theta) + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta)$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta}$$

där $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.