Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2}.$$

Lösning:

(a) Se Definition 2.20 eller (2.10) och (2.11) i boken.

(b) Först visar vi att $\frac{6n-2}{4n} \le \frac{3}{2}$ för alla positiva heltal n:

$$\frac{6n-1}{4n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4n} \le \frac{3}{2}$$

för alla $n > 0$. Därför är $3/2$ en övre begränsning av $(\frac{6n-1}{4n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$
För att visa $3/2$ är den minsta övre begränsning betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och letar efter en n sådant att

$$\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Om vi hittat för varje $\varepsilon > 0$ ett sådant n kan ett tal mindre än $3/2$ inte vara en övre begränsning till följden. Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon \quad &\Longleftarrow \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon \\ &\Longleftarrow \quad \frac{1}{4n} < \varepsilon \\ &\Longleftarrow \quad n > \frac{1}{4\varepsilon}.\end{aligned}$$

Därför för n tillräckligt stort (det vill säga för n sådant att $n > 1/(4\varepsilon)$) är

$$\frac{6n-1}{4n} > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Så inget tal mindre än $3/2$ är en övre begränsning och $3/2$ är därmed den minsta övre beränsningen av $(\frac{6n-1}{4n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

---

2. Finn alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till

$$2 + \log\left(\sqrt{1+x}\right) + 3\log\left(\sqrt{1-x}\right) = \log\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

Lösning: För att alla termer ska vara väldefinierade måste $-1 < x < 1$. I så fall kan vi skriva om likheten till

$$\begin{aligned}
& 2 + \log\left(\frac{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = 0 \\
\iff\ & 2 + \log\left(\frac{(1+x)^{1/2}(1-x)^{1/2}(1-x)}{(1-x^2)^{1/2}}\right) = 0 \\
\iff\ & 2 + \log(1-x) = 0 \\
\iff\ & \log(1-x) = -2 \\
\iff\ & 1 - x = e^{-2} \\
\iff\ & x = 1 - e^{-2}.
\end{aligned}$$

Eftersom $-1 < 1 - e^{-2} < 1$ finns det precis en lösning $x = 1 - e^{-2}$.

3. Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som är definierad som

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad (\text{for alla } x \in \mathbf{R})$$

är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

Lösning: För att visa sinh är bijektiv vill vi för varje $y \in \mathbf{R}$ visa att

$$\sinh x = y$$

har en entydig lösning x. Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\sinh x = y \iff\ & \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = y \iff \exp(x) - \exp(-x) - 2y = 0 \\
\iff\ & \exp(x)^2 - 2y\exp(x) - 1 = 0 \\
\iff\ & (\exp(x) - y)^2 - 1 - y^2 = 0 \\
\iff\ & (\exp(x) - y)^2 = 1 + y^2 \\
\iff\ & \exp(x) - y = \pm\sqrt{1+y^2} \\
\iff\ & \exp(x) = y \pm \sqrt{1+y^2}
\end{aligned}$$

Därför är $\sinh x = y$ ekvivalent med att $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ eller $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$.

Eftersom $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y|$ är

$$y - \sqrt{1+y^2} < y - |y| \leq 0 \quad \text{och} \quad y + \sqrt{1+y^2} > y + |y| \geq 0$$

för varje $y \in \mathbf{R}$. Detta (tillsammans med att $\exp\colon \mathbf{R} \to [0, \infty)$ är bijektiv) innebär att det inte finns något x sådant att $\exp(x) = y - \sqrt{1+y^2}$ men $\exp(x) = y + \sqrt{1+y^2}$ är ekvivalent med $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$. Därför är

$$\sinh x = y \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

för varje $y \in \mathbf{R}$ och sinh är bijektiv. Från våra beräkningar ser vi att

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

för $x \in \mathbf{R}$.

4.

(a) Betrakta polynomet $p(z) = z^n - 1$ (i den komplexa variabeln z) för något givet $n \in \mathbf{Z}_+$. Visa att

$$p(z) = (z-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.

(b) Ange och bevisa en formel för den geometriska summa

$$\sum_{j=1}^{n} ar^{j-1}.$$

För vilka värden av a och r gäller din formel? Fungera ditt bevis även för komplexa tal? Motivera ditt svar.

Lösning:

(a) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}(z-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} z^k + z^n\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} z^k\right) = z^n - 1 = p(z).\end{aligned}$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.[1]

(b) Om vi tar $z = r$ och $k = j-1$ i formeln övan får vi att

$$\frac{p(r)}{r-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} r^{j-1}\right) \quad \text{om } r \neq 1,$$

så

$$\sum_{j=1}^{n} ar^{j-1} = a\sum_{j=1}^{n} r^{j-1} = a\frac{p(r)}{r-1} = a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

[1]Här gäller beräkningar även när $z = 0$ om vi tolkar $z^0 = 1$ för alla z, som vi hade gjort i vårt arbete med polynom.

för $r \neq 1$.

Formeln gäller även för komplexa a och komplexa $r \neq 1$, eftersom vi endast använder oss av de fyra aritmetiska operationerna för att visa formeln, och de räkneregler gäller även för komplexa tal.

---

5. Vi har lärt oss att α är ett nollställe till ett polynom (i variabeln z) om och endast om polynomet är delbart med $(z - \alpha)$. Det gäller för polynom med komplexa koefficienter liksom för dem med reella koefficienter.

Betrakta igen polynomet $p(z) = z^n - 1$ från uppgift 4(a).

(a) Hitta alla komplexa nollställen till $p(z)$ i polär form.

(b) Använd nollställena för att faktorisera $p(z)$ så långt det går (och därmed längre än i uppgift 4(a)).

(c) Använd ditt svar på (b) och uppgift 4(a) för att visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right).$$

Lösning:

(a) Vi letar efter $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbf{R}$) sådant att $p(z) = z^n - 1 = 0$, så vi skriver om $r^n e^{in\theta} - 1 = 0 \iff r^n e^{in\theta} = 1 = e^{2\pi i \ell}$ för godtyckliga $\ell \in \mathbf{Z}$. Genom att likställa absolutbeloppen och argumenten av båda led ser vi direkt att lösningarna är

$$r = 1 \text{ och } \theta = \frac{2\pi\ell}{n} \text{ för } \ell = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(b)

$$p(z) = \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right)$$

(c) Vi får att

$$(z-1)\left(\sum_{j=1}^{n} z^k\right) \underset{\substack{\uparrow \\ 4(\mathrm{a})}}{=} p(z) \underset{\substack{\uparrow \\ 5(\mathrm{b})}}{=} \prod_{\ell=0}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right) = (z-1) \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right)$$

så vi kan strycka $(z-1)$ för att få

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{\ell=1}^{n-1} \left(z - e^{2\pi i \frac{\ell}{n}}\right)$$

för alla $z \in \mathbf{C}$.[2]

---

[2] Likheten gäller även för $z = 1$ eftersom två polynom av grad $n-1$ är lika för alla z om de är lika för minst $n-1$ olika z.

6.

(a) Bevisa att
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\pi k}{n} = \frac{i\pi}{2}(n-1).$$

(b) Använd räkneregler för den komplexa exponentialfunktionen och del (a) för att visa att
$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}} = (-i)^{n-1}.$$

Lösning:

(a) Vi kan använda oss av formeln för en aritmetiska summa för att räkna
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{i\pi k}{n} = \frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{i\pi}{2}(n-1).$$

(b) Vi beräknar att
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}} &= \exp\left(-i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}(n-1)\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} = (-i)^{n-1}.\end{aligned}$$

7.

(a) Visa att
$$\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = -\frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}(1 - e^{2\pi i\frac{k}{n}})$$
och därför är
$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right).$$

(b) Använd del (a), och uppgifter 6(b) och 5(c) för att visa att
$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Lösning:

(a) Från Eulers formel får vi att
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{\pi i\frac{k}{n}} - e^{-\pi i\frac{k}{n}}\right) \\ &= \frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}} - 1\right) = -\frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}\left(1 - e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right).\end{aligned}$$

Om vi tar produkten av likheterna ovan med $k = 1, 2, \dots, n-1$ får vi att

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} -\frac{e^{-i\pi\frac{k}{n}}}{2i}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right).$$

(b) Vi beräknar att

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ 7(\mathrm{a})}}{=} \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{-i\pi\frac{k}{n}}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right)$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ 6(\mathrm{b})}}{=} \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1}(-i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)\right)$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ 6(\mathrm{b})}}{=} \left(-\frac{1}{2i}\right)^{n-1}(-i)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1^k\right)$$
$$= \frac{(-i)^{n-1}n}{2^{n-1}(-i)^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
