TATB04/TEN3 **Tenta, 2025-03-21**

Inledande matematisk analys

1.

(a) Nedan finns en lista över olika steg man skulle kunna tänka genomföra i ett induktionsbevis. Välj ut stegen du behöver för att genomföra ett korrekt induktionsbevis av $P(n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$, där $P(n)$ är ett påstående som beror på $n \in \mathbf{Z}_+$.

(i) Bevisa att $P(n) \implies P(n+1)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

(ii) Bevisa att $P(n+1) \implies P(n)$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

(iii) Bevisa att $P(n)$ är sant för något jämnt $n \in \mathbf{Z}_+$.

(iv) Bevisa att $P(1)$ är sant.

(v) Anta att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(vi) Genom att hänvisa till induktionsaxiomet, notera att vi har genomfört alla steg som behövs för ett fullständigt induktionsbevis, och därmed är bevisat att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

(b) Ge ett induktionsbevis av formeln

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \qquad (*)$$

där $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ är givna tal och $n \in \mathbf{Z}_+$.

Lösning:

(a) Stegen man behöver är (iv), (i) och möjligtvis (vi).

En vanlig misstag: Vissa studenter skriver upp induktionssteget (a) i två delsteg: Man först antar att $P(n)$ är sant för något $n \in \mathbf{Z}_+$; och sedan bevisar att $P(n+1)$ är sant under detta antagande. Det är helt okej, men notera att det inte är samma sak att anta $P(n)$ är sant för *något* $n \in \mathbf{Z}_+$ som att anta $P(n)$ är sant för *alla* $n \in \mathbf{Z}_+$ - för då har man antagit allt man ska bevisa. Därför är det fel att säga (e) är en del av ett korrekt induktionsbevis.

(b) När $n = 1$ kan vi beräkna att

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{1} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$$

och

$$a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_2$$

så $(*)$ är bevisat för $n = 1$.

Under antagandet att $(*)$ är sant för något $n = \ell$ kan vi betrakta att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\ell+1}(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{\ell}(a_k - a_{k+1}) + (a_{\ell+1} - a_{\ell+2})\\ &= (a_1 - a_{\ell+1}) + (a_{\ell+1} - a_{\ell+2}) = a_1 - a_{\ell+2}\end{aligned}$$

som är $(*)$ med $n = \ell + 1$.

Därför enligt induktionsaxiomen är $(*)$ bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

---

2. Med hjälp av $(*)$ bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (\dagger)$$

för varje $n \in \mathbf{Z}_+$. Ett direkt induktionsbevis av $(\dagger)$ ger noll poäng. Tips: Ta $a_k = 1/k$.

Lösning: Om $a_k = 1/k$ säger $(*)$ att

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

men

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

och

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

så $(\dagger)$ är bevisad.

3.

(a) Ange medelpunkt och radie för cirkeln som ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 = 2y - 7x.$$

(b) Faktorisera polynomet

$$p(x) = 9x^3 - 3x^2 - 5x - 1$$

så långt som möjligt.

Lösning:

(a) Vi skriver om

$$x^2 + y^2 = 2y - 7x \iff x^2 + 7x + y^2 - 2y = 0 \iff \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{53}{4}$$

så medelpunkten är $(-\frac{7}{2}, 1)$ och radien är $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

(b) Vi kan enkelt gissa och kontrollera att $x = 1$ är en lösning och polynomdivision ger sedan att

$$p(x) = (x-1)(9x^2 + 6x + 1).$$

Vi kan också kvadratkomplettera för att se att

$$p(x) = 9(x-1)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 9(x-1)\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = (x-1)(3x+1)^2.$$

---

4. För vilka x är uttrycket

$$\sqrt{\frac{1 + \ln x}{6 \ln x}}$$

definierad?

Lösning: Först utreder vi för vilka b uttrycket $\sqrt{\frac{1+b}{6b}}$ är definierad: Det krävs att

$$\frac{1+b}{6b} = \frac{1}{6b} + \frac{1}{6}$$

är definierad och icke-negativt för att kunna ta kvadratroten. Det gäller om och endast om $b \leq -1$ eller $b > 0$. Sedan är $b = \ln x$, så uttrycket är definierad om och endast om

$$0 < x \leq e^{-1} \quad \text{eller} \quad x > 1.$$

5.

(a) Visa att uttrycket

$$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$$

(där $a, b \in \mathbf{R}$) inte beror på b.

(b) Visa att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

Lösning:

(a) Enligt additions- och subtraktionsformler för trigonometriska funktioner är

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} \\
&= \frac{(\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b)}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b)} \\
&= \frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} = \tan a
\end{aligned}$$

som inte beror på b.

(b) Om vi tar $a = (x+y)/2$ och $b = (x-y)/2$ i likheten ovan får vi att

$$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$.

6.

Logaritmen av a i basen b definieras enligt formeln

$$\log_b(a) := \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

för $a, b > 0$. Förenkla följande uttryck.

(a) $\log_2(18) + \log_2(24) - \log_2(54)$

(b) $\log_{a^2}(a^7)$ där $a > 0$

(c) $2^{\log_4(9)}$

Lösning:

(a) $\log_2(18) + \log_2(24) - \log_2(54) = \log_2\left(\frac{18\times 24}{54}\right) = \log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$

(b) $\log_{a^2}(a^7) = \frac{\ln a^7}{\ln a^2} = \frac{7\ln a}{2\ln a} = \frac{7}{2}$

(c) $2^{\log_4(9)} = 2^{\frac{\ln 9}{\ln 4}} = e^{\frac{\ln 9}{\ln 4}\times \ln 2} = e^{\frac{\ln 9}{2\ln 2}\times \ln 2} = e^{\frac{2\ln 3}{2}} = 3$

7.

(a) Skriv

$$z = \frac{6}{1 - i\sqrt{3}}$$

i polär form $z = re^{i\theta}$, där $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Finn alla lösningar $w \in \mathbf{C}$ till

$$w^2 = -2 - \frac{3}{2}i.$$

Lösning:

(a) Vi beräknar att

$$z = \frac{6}{1-i\sqrt{3}} = \frac{6(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{6(1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Därför ser vi att $|z| = \sqrt{(3/2)^2 + (3\sqrt{3}/2)^2} = 3$ och $\operatorname{Arg}(z) = \pi/3$, så $z = 3e^{\pi i/3}$.

(b) Låt $w = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Då får vi att $x^2 - y^2 = -2$ och $2xy = -\frac{3}{2}$ och de två ekvationerna kan vi lösa för att få

$$w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{eller} \quad w = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$
