

Inledande matematisk analys

1.

- (a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$.
- (b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}_+} \frac{6n-1}{2n} = 3.$$

Lösning:

- (a) Se Definition 2.20 eller (2.10) och (2.11) i boken.
- (b) Först visar vi att $\frac{6n-1}{2n} \leq 3$ för alla positiva heltal n :

$$\frac{6n-1}{2n} = 3 - \frac{1}{2n} \leq 3$$

för alla $n > 0$. Därför är 3 en övre begränsning av $(\frac{6n-1}{2n})_{n \in \mathbf{Z}_+}$.

För att visa 3 är den minsta övre begränsning betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och letar efter en n sådant att

$$\frac{6n-1}{2n} > 3 - \varepsilon.$$

Om vi för varje $\varepsilon > 0$ hittar ett sådant n kan ett tal mindre än 3 inte vara en övre begränsning till följderna. Vi beräknar att

$$\begin{aligned} \frac{6n-1}{2n} > 3 - \varepsilon &\iff 3 - \frac{1}{2n} > 3 - \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{2n} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{1}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Därför för n tillräckligt stort (det vill säga för n sådant att $n > 1/(2\varepsilon)$) är

$$\frac{6n-1}{2n} > 3 - \varepsilon.$$

Så inget tal mindre än 3 är en övre begränsning och 3 är därmed den minsta övre begränsningen av $(\frac{6n-1}{2n})_{n \in \mathbf{Z}_+}$.

2. Finn alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till

$$2 + 2 \log(\sqrt{1+x}) + 4 \log(\sqrt{1-x}) = \log(1-x^2).$$

Lösning: För att alla termer ska vara väldefinierade måste $-1 < x < 1$. I så fall kan vi skriva om likheten till

$$\begin{aligned} 2 + \log \left(\frac{(\sqrt{1+x})^2 (\sqrt{1-x})^4}{1-x^2} \right) &= 0 \\ \iff 2 + \log \left(\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x^2} \right) &= 0 \\ \iff 2 + \log(1-x) &= 0 \\ \iff \log(1-x) &= -2 \\ \iff 1-x &= e^{-2} \\ \iff x &= 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

Eftersom $-1 < 1 - e^{-2} < 1$ finns det precis en lösning $x = 1 - e^{-2}$.

3. Utifrån det du vet om den naturliga exponentialfunktionen visa att funktionen $\sinh: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ som är definierad som

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (\text{for alla } x \in \mathbf{R})$$

är bijektiv. Ge den inversa funktionen.

Lösning: För att visa $\sinh$ är bijektiv vill vi för varje $y \in \mathbf{R}$ visa att

$$\sinh x = y$$

har en entydig lösning x . Vi räknar att

$$\begin{aligned} \sinh x = y &\iff \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = y \iff \exp(x) - \exp(-x) - 2y = 0 \\ &\iff \exp(x)^2 - 2y \exp(x) - 1 = 0 \\ &\iff (\exp(x) - y)^2 - 1 - y^2 = 0 \\ &\iff (\exp(x) - y)^2 = 1 + y^2 \\ &\iff \exp(x) - y = \pm \sqrt{1 + y^2} \\ &\iff \exp(x) = y \pm \sqrt{1 + y^2} \end{aligned}$$

Därför är $\sinh x = y$ ekvivalent med att $\exp(x) = y + \sqrt{1 + y^2}$ eller $\exp(x) = y - \sqrt{1 + y^2}$.

Eftersom $\sqrt{1 + y^2} > \sqrt{y^2} = |y|$ är

$$y - \sqrt{1 + y^2} < y - |y| \leq 0 \quad \text{och} \quad y + \sqrt{1 + y^2} > y + |y| \geq 0$$

för varje $y \in \mathbf{R}$. Detta (tillsammans med att $\exp: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ är bijektiv) innebär att det inte finns något x sådant att $\exp(x) = y - \sqrt{1 + y^2}$ men $\exp(x) = y + \sqrt{1 + y^2}$ är ekvivalent med $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Därför är

$$\sinh x = y \iff x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

för varje $y \in \mathbf{R}$ och $\sinh$ är bijektiv. Från våra beräkningar ser vi att

$$\sinh^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$$

för $x \in \mathbf{R}$.

4.

Under kursens gång har vi använt oss av *Bernoullis olikhet*:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ och } x \geq -1.$$

Ge ett bevis av Bernoullis olikhet.

Lösning: Först kontrollerar vi olikheten i basfallet (när $n = 1$):

$$\begin{aligned} \text{vänsterledet är } (1 + x)^n &= (1 + x)^1 = 1 + x; \quad \text{och} \\ \text{högerledet är } 1 + nx &= 1 + 1 \times x = 1 + x. \end{aligned}$$

Därför ser vi att likheten stämmer i basfallet $n = 1$.

Nu antar vi att olikheten är sant för något positivt heltal m :

$$(1 + x)^m \geq 1 + mx. \tag{1}$$

Målet är nu att visa olikheten gäller för $n = m + 1$:

$$(1 + x)^{m+1} \geq 1 + (m + 1)x.$$

Det kan vi nå med hjälp av antagandet. Vi börjar med vänsterledet av det vi vill visa och räknar att

$$\begin{aligned} (1 + x)^{m+1} &= (1 + x)^m (1 + x) \\ &\geq (1 + mx)(1 + x) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (1) \text{ och } x \geq -1 \\ &= 1 + mx + x + mx^2 \\ &= 1 + (m + 1)x + mx^2 \\ &\geq 1 + (m + 1)x. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad m \in \mathbf{Z}_+ \end{aligned}$$

Det är likheten med $n = m + 1$.

Enligt induktionsprincipen har vi bevisat att

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ och } x \geq -1.$$

5.

Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^2 + (4 - i)z + 3 = 3i$.

Lösning: Vi skriver om ekvationen till

$$z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$$

och sedan kvadratkompletterar vänsterledet och får att

$$\begin{aligned} z^2 + (4-i)z + 3 - 3i &= \left(z + \frac{4-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{4-i}{2}\right)^2 + 3 - 3i \\ &= \left(z + \frac{4-i}{2}\right)^2 - \frac{3+4i}{4}. \end{aligned}$$

Därför tar vi $w = z + \frac{4-i}{2}$ och letar efter w sådant att

$$w^2 = \frac{3+4i}{4}.$$

Låt $w = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. Då får vi att $x^2 - y^2 = 3/4$ och $2xy = 1$ och de två ekvationerna kan vi lösa för att få

$$w = \frac{2+i}{2} \quad \text{eller} \quad w = -\frac{2+i}{2}.$$

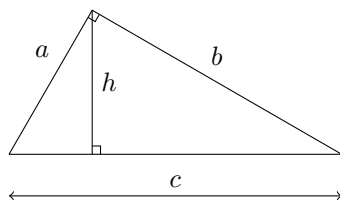
Vi har nu två ekvationer att lösa,

$$z + \frac{4-i}{2} = \frac{2+i}{2} \quad \text{och} \quad z + \frac{4-i}{2} = -\frac{2+i}{2}.$$

och lösningarna är

$$z = -1 + i \quad \text{och} \quad z = -3.$$

6. Betrakta en rätvinklig triangel med sidolängder a , b och c enligt bilden nedan.



I bilden har vi dragit ett sträck från det översta hörnet rakt ner så att det träffar hypotenusan i en rättvinkel. Benämna längden av sträcket h .

- (a) Genom att betrakta sidan med längd c och sedan sidan med längd a som bas, räkna ut två olika formler för triangelns area. Använd de för att visa att

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}.$$

- (b) Använd del (a) och Pythagoras sats för att visa

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Lösning:

- (a) Om vi betraktar sidan med sidolängd a som basen ger formeln för en triangelns area att arean är $\frac{1}{2}ab$. Om vi istället betraktar sidan med sidolängd c som basen är arean $\frac{1}{2}ch$. Därför är

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \implies \frac{1}{h} = \frac{c}{ab} \implies \frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}$$

- (b) Enligt Pythagoras sats är $c^2 = b^2 + a^2$ så

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

7.

- (a) Visa att

$$\sin(2n\theta + 2\theta) = \sin(2n\theta) + 2\sin\theta \cos((2n+1)\theta)$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

- (b) Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta}$$

där $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

Lösning:

(a) Vi kan räkna

$$\begin{aligned}\sin(2n\theta + 2\theta) &= \sin(2n\theta) \cos(2\theta) + \cos(2n\theta) \sin(2\theta) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{additionsformeln} \\ &= \sin(2n\theta)(1 - 2\sin^2(\theta)) + \cos(2n\theta)2\sin(\theta)\cos\theta \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{dubbla vinklarna} \\ &= \sin(2n\theta) + 2\sin(\theta)(\cos(2n\theta)\cos\theta - \sin(2n\theta)\sin(\theta)) \\ &= \sin(2n\theta)1 + 2\sin(\theta)\cos(2n\theta + \theta) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{additionsformeln} \\ &= \sin(2n\theta)1 + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta).\end{aligned}$$

(b) I fallet $n = 1$ kan vi kontrollera direkt att likheten är sant:

$$\sum_{k=1}^1 \cos((2k-1)\theta) = \cos(\theta) \quad \text{och} \quad \frac{\sin(2 \times 1 \times \theta)}{2\sin\theta} = \cos\theta.$$

dubbla vinkeln

Nu antar vi att likheten gäller för ett givet $n \in \mathbf{Z}_+$ och beräknar att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)\theta) &= \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)\theta) + \cos((2n+1)\theta) \\ &= \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta} + \cos((2n+1)\theta) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{enligt antagandet} \\ &= \frac{\sin(2n\theta) + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta)}{2\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(2(n+1)\theta)}{2\sin\theta} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{enligt (a)}\end{aligned}$$

som är likhet med n bytt ut mot $n+1$. Enligt induktionsprincipen är likheten bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
