Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{8n-3}{6n} = \frac{4}{3}.$$

Lösning:

(a) Se Definition 2.20 eller (2.10) och (2.11) i boken.

(b) Först visar vi att $\frac{8n-3}{6n} \leq \frac{4}{3}$ för alla positiva heltal n:

$$\frac{8n-3}{6n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} \leq \frac{4}{3}$$

för alla $n > 0$. Därför är $4/3$ en övre begränsning av $(\frac{8n-3}{6n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$

För att visa $4/3$ är den minsta övre begränsning betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och letar efter en n sådant att

$$\frac{8n-3}{6n} > \frac{4}{3} - \varepsilon.$$

Om vi för varje $\varepsilon > 0$ hittar ett sådant n kan ett tal mindre än $4/3$ inte vara en övre begränsning till följden. Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\frac{8n-3}{6n} > \frac{4}{3} - \varepsilon \;&\Longleftarrow\; \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} > \frac{4}{3} - \varepsilon \\ &\Longleftarrow\; \frac{1}{2n} < \varepsilon \\ &\Longleftarrow\; n > \frac{1}{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Därför för n tillräckligt stort (det vill säga för n sådant att $n > 1/(2\varepsilon)$) är

$$\frac{8n-3}{6n} > \frac{4}{3} - \varepsilon.$$

Så inget tal mindre än $4/3$ är en övre begränsning och $4/3$ är därmed den minsta övre beränsningen av $(\frac{8n-3}{6n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

2.

(a) Beräkna

$$\sum_{k=1}^{42} 2^{4-k}.$$

(b) Beräkna
$$\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4}.$$

Lösning:

(a) Vi beräknar att
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{42} 2^{4-k} &= \sum_{k=1}^{42} 2^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&\underset{(*)}{=} 2^3 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{42}}{1-\frac{1}{2}} = 2^4 \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{42}\right) = 2^4 - 2^{-38}
\end{aligned}$$

där vi har använt oss av att:

(∗) $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$ och $r \neq 0, 1$ (formeln för en geometrisk summa).

(b) Vi beräknar att
$$\begin{aligned}
\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4} &= \frac{3}{4} \sum_{k=-15}^{32} k + \frac{5}{4} \sum_{k=-15}^{32} 1 \\
&\underset{(\dagger)}{=} \frac{3}{4}\left(-\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{32} k\right) + \frac{5}{4} \times 48 \\
&\underset{(\ddagger)}{=} \frac{3}{4}\left(-\frac{15 \times 16}{2} + \frac{32 \times 33}{2}\right) + \frac{5}{4} \times 48 \\
&= 3(-30 + 4 \times 33) + 60 = 366
\end{aligned}$$

där vi har använt oss av att:

(†) $\sum_{k=-15}^{32} 1 = 48$ ty summan har 48 termer och alla är lika med 1; och

(‡) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$ (formeln för en aritmetisk summa).

---

3. Betrakta följande påstående: Det finns inte positiva tal a och b som uppfyller att
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}.$$

(a) Vilket av följande alternativ är negationen av påståendet? Du behöver inte motivera ditt svar.

(i) För alla positiva tal a och b är $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.

(ii) Det finns ett val av positiva tal a och b som uppfyller att $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.

(iii) För alla positiva tal a och b är $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$.

(iv) Om $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$ är a och b positiva tal.

(b) Använd negationen för att ge ett bevis av påståendet.

Lösning:

(a) (ii)

(b) Vi ger ett motsägelsebevis. Därför antar vi att (ii) är sant och utifrån det beräknar att

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b} &\implies \frac{b+a}{ab} = \frac{2}{a+b} \\ &\implies (a+b)^2 = 2ab \implies a^2 + b^2 = 0 \implies a = b = 0. \end{aligned}$$

Därför medför antagendet att vi har två positiva heltal a och b som uppfyller likheten $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$ ledar till slutsatsen att $a = b = 0$. Eftersom tal kan inte vara både positiva och noll samtidigt är det ett motsägelse och därför måste (ii) vara falskt. Därmed har vi visat att det inte finns positiva tal a och b som uppfyller att $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$.

4.

Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_+).$$

Lösning: Först kontrollerar vi likheten i basfallet (när $n = 1$):

$$\text{vänsterledet är} \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}; \quad \text{och}$$

$$\text{högerledet är} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Därför ser vi att likheten stämmer i basfallet $n = 1$.

Nu antar vi att påståendet är sant för något positivt heltal m:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}. \tag{1}$$

Målet är nu att visa påståendet gäller för $n = m + 1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Det kan vi nå med hjälpa av antagandet. Vi börjar med vänsterledet av det vi vill visa och räknar att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&\underset{(1)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}.
\end{aligned}$$

Därmed gäller påståendet för $n = m + 1$.

Genom induktionsprincipen har vi bevisat att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

5.

Betrakta polynomen

$$p(x) = x^{48} - 4^8 x^{40} + x^7 - 2^6 x^4 + x + 2$$

och

$$q(x) = x(x-4).$$

Beräkna resten $r(x)$ av $p(x)$ delat med $q(x)$.

Lösning:

Enligt polynomdivisionssatsen vet vi att

$$p(x) = q(x)k(x) + r(x)$$

där k och r är polynom. Graden av r ska vara högst ett, så och $r(x) = ax + b$ för konstanter $a, b \in \mathbf{R}$. Dessutom är $q(0) = q(4) = 0$ så

$$\begin{aligned}
2 = p(0) = q(0)k(0) + r(0) = b \quad \text{och} \\
6 = p(4) = q(4)k(4) + r(4) = 4a + b
\end{aligned}$$

så $b = 2$ och därmed är $a = 1$. Därför är $r(x) = x + 2$.
