Inledande matematisk analys

1.

(a) Ge definitionen av vad det betyder att säga u är den minsta övre begränsningen av en följd $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

(b) Visa med hjälp av definitionen du gav i (a) att

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+} \frac{14n-3}{7n} = 2.$$

Lösning:

(a) Se Definition 2.20 eller (2.10) och (2.11) i boken.

(b) Först visar vi att $\frac{14n-3}{7n} \leq 2$ för alla positiva heltal n:

$$\frac{14n-3}{7n} = 2 - \frac{3}{7n} \leq 2$$

för alla $n > 0$. Därför är 2 en övre begränsning av $(\frac{14n-3}{7n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$

För att visa 2 är den minsta övre begränsning betraktar vi ett $\varepsilon > 0$ och letar efter en n sådant att

$$\frac{14n-3}{7n} > 2 - \varepsilon.$$

Om vi för varje $\varepsilon > 0$ hittar ett sådant n kan ett tal mindre än 4/3 inte vara en övre begränsning till följden. Vi beräknar att

$$\begin{aligned} \frac{14n-3}{7n} > 2-\varepsilon &\Longleftarrow 2 - \frac{3}{7n} > 2 - \varepsilon \\ &\Longleftarrow \frac{3}{7n} < \varepsilon \\ &\Longleftarrow n > \frac{3}{7\varepsilon}. \end{aligned}$$

Därför för n tillräckligt stort (det vill säga för n sådant att $n > 3/(7\varepsilon)$) är

$$\frac{14n-3}{7n} > 2 - \varepsilon.$$

Så inget tal mindre än 2 är en övre begränsning och 2 är därmed den minsta övre beränsningen av $(\frac{14n-3}{7n})_{n\in\mathbf{Z}_+}$.

2.

(a) Beräkna

$$\sum_{k=1}^{42} 6 \times 3^{3-k}.$$

(b) Beräkna
$$\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4}.$$

Lösning:

(a) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{42} 6\times 3^{3-k} &= \sum_{k=1}^{42} 6\times 3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\ &\underset{(*)}{\overset{\uparrow}{=}} 6\times 3^2 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{42}}{1-\frac{1}{3}} = 3^4\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{42}\right) = 3^4 - 3^{-38}\end{aligned}$$

där vi har använt oss av att:

(∗) $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$ och $r \neq 0, 1$ (formeln för en geometrisk summa).

(b) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}\sum_{k=-15}^{32} \frac{3k+5}{4} &= \frac{3}{4}\sum_{k=-15}^{32} k + \frac{5}{4}\sum_{k=-15}^{32} 1\\ &\underset{(\dagger)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{3}{4}\left(-\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{32} k\right) + \frac{5}{4}\times 48\\ &\underset{(\ddagger)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{3}{4}\left(-\frac{15\times 16}{2} + \frac{32\times 33}{2}\right) + \frac{5}{4}\times 48\\ &= 3(-30 + 4\times 33) + 60 = 366\end{aligned}$$

där vi har använt oss av att:

(†) $\sum_{k=-15}^{32} 1 = 48$ ty summan har 48 termer och alla är lika med 1; och

(‡) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ för $n \in \mathbf{Z}_+$ (formeln för en aritmetisk summa).

---

3. Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ som ges av formeln $f(x) = x^4$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(a) Visa att
$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$
för $x, y \in \mathbf{R}$ ~~och $n \in \mathbf{Z}_+$~~.

(b) Använd del (a) för att visa att funktionen f är strängt växande på $[0, \infty)$.

Lösning:

(a) Vi kan för $x, y \in \mathbf{R}$ och $n \in \mathbf{Z}_+$ att

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\\
&= x(x^3+x^2y+xy^2+y^3) - y(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\\
&= (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3) - (x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)\\
&= x^4 + (x^3y+x^2y^2+xy^3) - (x^3y+x^2y^2+xy^3) - y^4\\
&= x^4 - y^4.
\end{aligned}$$

(b) Betrakta $0 \le x < y$. Då är

$$f(x) - f(y) = x^4 - y^4 = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3).$$

Eftersom $x < y$ är $x - y < 0$. Eftersom $0 \le x < y$ måste $x^3+x^2y+xy^2 \ge 0$ och $y^3 > 0$ så $(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > 0$. Därför är

$$f(x) - f(y) = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) < 0$$

för alla $x, y \in [0, \infty)$ som uppfyller $x < y$. Därmed är f strängt växande på $[0, \infty)$.

4.

I senare delar av kursen har vi använt oss av *Bernoullis olikhet*:

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ och } x \ge -1.$$

Beviset av den kräver inget mer kunskap än det vi lärde oss i först delen av kursen. Ge ett bevis av Bernoullis olikhet.

Lösning: Först kontrollerar vi olikheten i basfallet (när $n = 1$):

$$\begin{aligned}
\text{vänsterledet är}\quad & (1+x)^n = (1+x)^1 = 1+x; \quad \text{och}\\
\text{högerledet är}\quad & 1 + nx = 1 + 1 \times x = 1 + x.
\end{aligned}$$

Därför ser vi att likheten stämmer i basfallet $n = 1$.

Nu antar vi att olikheten är sant för något positivt heltal m:

$$(1+x)^m \ge 1 + mx. \tag{1}$$

Målet är nu att visa olikheten gäller för $n = m + 1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Det kan vi nå med hjälpa av antagandet. Vi börjar med vänsterledet av det vi vill visa och räknar att

$$\begin{aligned}
(1+x)^{m+1} &= (1+x)^m(1+x)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ (1)\text{ och } x \ge -1}}{\ge} (1+mx)(1+x)\\
&= 1 + mx + x + mx^2\\
&= 1 + (m+1)x + mx^2\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ m \in \mathbf{Z}_+}}{\ge} 1 + (m+1)x.
\end{aligned}$$

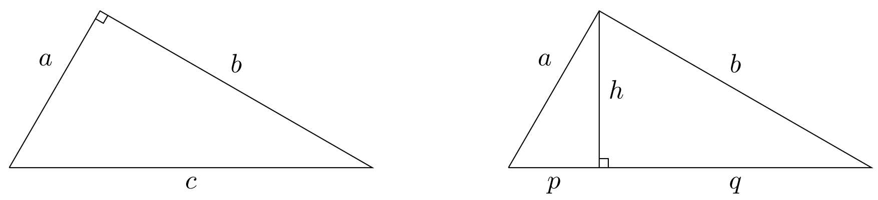
Det är likheten med $n = m + 1$.

Enligt induktionsprincipen har vi bevisat att

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ och } x \geq -1.$$

---

5. Betrakta en rätvinklig triangel med sidolängder a, b och c enligt bilden nedan till vänster.



I bilden ovan till höger har vi dragit ett sträck från det översta hörnet rakt ner så att det träffar hypotenusan i en rättvinkel. Benämna längden av sträcket h. På så sätt delas hypotenusan i två delar av längd p respektive q.

(a) I bilderna ovan syns tre olika rätvinkliga trianglar. Ange tre likheter som följer från Pythagoras sats.

(b) Två av de tre likheterna innehåller längden h. Plussa ihop dem för att bevisa
$$2h^2 = (a^2 + b^2) - (p^2 + q^2).$$

(c) Bevisa att
$$h^2 = pq.$$

Lösning:

(a) Enligt Pythagoras sats är

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ p^2 + h^2 &= a^2 \quad \text{och} \\ q^2 + h^2 &= b^2. \end{aligned}$$

(b) Om vi plussar ihop den andra och tredje likheter får vi att

$$(p^2 + h^2) + (q^2 + h^2) = a^2 + b^2$$

och den kan vi skriva om till $2h^2 = (a^2 + b^2) - (p^2 + q^2)$.

(c) Men hjälpa av första likheten i (a) det följer från (b) att $2h^2 = c^2 - (p^2 + q^2)$ och eftersom $c = p + q$ är

$$2h^2 = c^2 - (p^2 + q^2) = (p + q)^2 - (p^2 + q^2) = (p^2 + 2pq - q^2) - (p^2 + q^2) = 2pq,$$

så $h^2 = pq$.
