TATB04/TEN2 **Dugga 2, 2025-01-17**

Inledande matematisk analys

1.

Betrakta funktionen
$$f(x) = \frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4}$$
med definitionsmängd $D = \{x \in \mathbf{R} \colon x \neq 4\}$.

(a) Visa, med till exempel ett motsägelsebevis, att det inte finns något $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$.

(b) Visa att det för varje reellt tal $y \neq 1$ finns (minst) ett $x \in D$ sådant att $f(x) = y$.

Lösning:

(a) Vi ger ett motsägelsebevis. Vi antar att det finns ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$:
$$f(x) = 1 \implies \frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4} = 1 \implies x - \frac{7}{2} = x - 4 \implies -\frac{7}{2} = -4.$$
Eftersom $-\frac{7}{2} \neq -4$ har vi räknat oss fram till ett motsägelse och därför kan det inte finnas ett $x \in D$ sådant att $f(x) = 1$.

(b) Vi betraktar ett $y \neq 1$ och räknar att
$$f(x) = y \impliedby \frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4} = y \impliedby x - \frac{7}{2} = xy - 4y \impliedby x(1-y) = \frac{7}{2} - 4y \impliedby x = \frac{\frac{7}{2} - 4y}{1 - y}.$$
så $x = (\frac{7}{2} - 4y)/(1 - y)$ är sådant att $f(x) = y$ och utöver det är samma x ett element i D eftersom
$$4 = x = \frac{\frac{7}{2} - 4y}{1 - y} \implies 4 - 4y = \frac{7}{2} - 4y \implies 4 = \frac{7}{2}.$$

2.

(a) Visa att lösningar $z \in \mathbf{C}$ till
$$|z - 3i| = 2|z|.$$
är en cirkel i det komplexa planet med medelpunkt $a + ib$ och radian r genom att visa ekvationen är ekvivalent med den kända kartesiska ekvationen för en cirkel:
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
där $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

(b) Ange medelpunkten och radian av cirkeln ovan.

Lösning:

(a) Vi beräknar att

$$
\begin{aligned}
|z-3i| = 2|z| &\iff |z-3i|^2 = 4|z|^2 \iff x^2 + (y-3)^2 = 4(x^2+y^2) \\
&\iff 0 = 3x^2 + 3y^2 + 6y + 9 \iff 0 = 3x^2 + 3(y+1)^2 - 3 - 9 \\
&\iff 4 = x^2 + (y+1)^2.
\end{aligned}
$$

som är en ekvation av en cirkel i xy-planet.

(b) Från ekvationen ser vi att medelpunkten är $(a,b) = (0,-1)$, eller $-i$ i komplexaplanet, och radian är $r = 2$.

3.

(a) Finn alla lösningar $z \in \mathbf{C}$ till

$$z^6 = 3\sqrt{3} + 3i.$$

Ange lösningarna i polärform.

(b) Rita lösningarna i den komplexa planet.

Lösning:

(a) Först skriver vi $3\sqrt{3} + 3i$ i polär form: eftersom talet har positivt imaginärdel och $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{3}{3\sqrt{3}}$, och $\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2)} = 6$ är

$$3\sqrt{3} + 3i = 6e^{\frac{\pi i}{6}}.$$

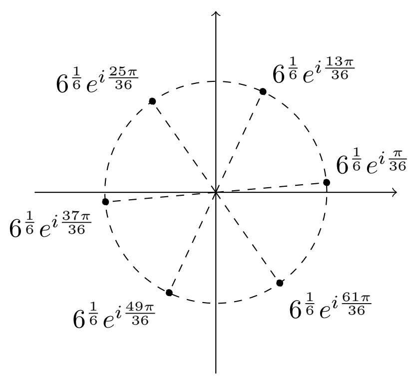
Därför behöver vi löser

$$z^6 = 6e^{\frac{\pi i}{6}} \iff (re^{i\theta})^6 = 6e^{\frac{\pi i}{6}} \iff r^6 e^{i6\theta} = 6e^{\frac{\pi i}{6}}$$

där vi har även skrivit $z = re^{i\theta}$ i polärform (för några $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$). Det betyder att $r^6 = 6$ och $6\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ för $k \in \mathbf{Z}$. Eftersom vi kräver $r > 0$ är $r = \sqrt[6]{6}$. Vi kan också löser ekvationen i θ och får $\theta = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$ där $k \in \mathbf{Z}$. Därför är lösningarna

$$z = 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{36}}, 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{13\pi}{36}}, 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{25\pi}{36}}, 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{37\pi}{36}}, 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{49\pi}{36}} \text{ och } 6^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{61\pi}{36}}.$$

(b)



4.

Kom ihåg att
$$a^b = \exp(b \ln a)$$
för $a > 0$ och $b \in \mathbf{R}$ så därför är
$$a^b = t \iff b = \frac{\ln t}{\ln a} \quad \text{för positiva } a \neq 1.$$

(a) Hitta alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till ekvationen
$$(2^x - 1)(2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24) = 0.$$

(b) Finn alla lösningar $x \in \mathbf{R}$ till
$$\ln(1 - x) + \ln(-1 - x) = 2.$$

Lösning:

(a) Vi kvadratkompletterar
$$\begin{aligned}
2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24 &= \left(2^x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + 24 = \left(2^x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\
&= \left(\left(2^x - \frac{11}{2}\right) - \frac{5}{2}\right)\left(\left(2^x - \frac{11}{2}\right) + \frac{5}{2}\right) \\
&= (2^x - 8)(2^x - 3).
\end{aligned}$$

Så x är en lösning till $(2^x - 1)(2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24) = 0$ om och endast om $2^x = 1$, $2^x = 8$ eller $2^x = 3$. Därför är alla lösningar
$$x = \frac{\ln 1}{\ln 2} = 0, \quad x = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3 \quad \text{och} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

(b) Varje term i ekvationen $\ln(1 - x) + \ln(-1 - x) = 2$ är definierad om och endast om $x < -1$ (eftersom precis då är argumentet av varje logaritm positivt). Under förutsättningen att $x < -1$ är $\ln(1 - x) + \ln(-1 - x) = 2 \iff \ln((x - 1)(1 + x)) = 2$. Sedan räknar vi att
$$\begin{aligned}
&\ln((x - 1)(1 + x)) = 2 \\
&\iff (x - 1)(1 + x) = e^2 \iff x^2 = e^2 + 1 \\
&\iff x = \pm\sqrt{e^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Eftersom vi kräver att $x < -1$ är $x = -\sqrt{e^2 + 1}$ den enda lösningen till ekvationen.

---

5. Kom ihåg från vårt grupparbete att
$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

(a) Med hjälpa av sinus värdet ovan visa att

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

(b) Visa att

$$\sin\left(\frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}.$$

Lösning:

(a) Eftersom $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$ vet vi att $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$. Därför från trigonometriska ettan vet vi att

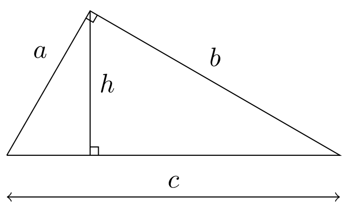
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) &= \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{16 - (5 - 2\sqrt{5} + 1)}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Vi beräknar att

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{15} &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsformel}}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}
\end{aligned}$$

---

6. Betrakta en rätvinklig triangel med sidolängder a, b och c enligt bilden nedan.



I bilden har vi dragit ett sträck från det översta hörnet rakt ner så att det träffar hypotenusan i en rättvinkel. Benämna längden av sträcket h.

(a) Genom att betrakta sidan med längd c och sedan sidan med längd a som bas, räkna ut två olika formler för triangels area. Använd de för att visa att

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}.$$

(b) Använd del (a) och Pythagoras sats för att visa

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Lösning:

(a) Om vi betraktar sidan med sidolängd a som basen ger formeln för en triangels area att arean är $\frac{1}{2}ab$. Om vi istället betraktar sidan med sidolängd c som basen är arean $\frac{1}{2}ch$. Därför är

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \implies \frac{1}{h} = \frac{c}{ab} \implies \frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}$$

(b) Enligt Pythagoras sats är $c^2 = b^2 + a^2$ så

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{b^2+a^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

7.

(a) Visa att

$$\sin(2n\theta + 2\theta) = \sin(2n\theta) + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta)$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Ge ett induktionsbevis av likheten

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta}$$

där $n \in \mathbf{Z}_+$ och $\theta \in \mathbf{R}$.

Lösning:

(a) Vi kan räkna

$$\begin{aligned}
\sin(2n\theta + 2\theta) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsformeln}}}{=} \sin(2n\theta)\cos(2\theta) + \cos(2n\theta)\sin(2\theta) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dubbla vinklarna}}}{=} \sin(2n\theta)(1 - 2\sin^2(\theta)) + \cos(2n\theta)2\sin(\theta)\cos\theta \\
&= \sin(2n\theta) + 2\sin(\theta)\left(\cos(2n\theta)\cos\theta - \sin(2n\theta)\sin(\theta)\right) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{additionsformeln}}}{=} \sin(2n\theta)1 + 2\sin(\theta)\cos(2n\theta + \theta) \\
&= \sin(2n\theta)1 + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta).
\end{aligned}$$

(b) I fallet $n = 1$ kan vi kontrollera direkt att likheten är sant:

$$\sum_{k=1}^{1} \cos((2k-1)\theta) = \cos(\theta) \quad \text{och} \quad \frac{\sin(2 \times 1 \times \theta)}{2\sin\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dubbla vinkeln}}}{=} \cos\theta.$$

Nu antar vi att likheten gäller för ett givet $n \in \mathbf{Z}_+$ och beräknar att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)\theta) &= \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\theta) + \cos((2n+1)\theta) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt antagandet}}}{=} \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin\theta} + \cos((2n+1)\theta) \\
&= \frac{\sin(2n\theta) + 2\sin\theta\cos((2n+1)\theta)}{2\sin\theta} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt (a)}}}{=} \frac{\sin(2(n+1)\theta)}{2\sin\theta}
\end{aligned}$$

som är likhet med n bytt ut mot $n+1$. Enligt induktionsprincipen är likheten bevisat för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.
