TATB08

Problemsamling

2025

Problem

1 Lektion 1

Vi påminner om **Taylors formel**

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{b(x)(x-a)^{n+1}}_{\text{Restterm}},$$

där vi utvecklat en given funktion $f(x)$ (som antas ha kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till a) kring en punkt a till ordning n, och $b(x)$ är begränsad i någon omgivning till a.

P **1.1** Skriv upp Taylors formel för utvecklingen av en given funktion $f(x)$ till ordning 2 kring $x = 2$ med restterm på ovanstående form (av ordning 3). Beräkna sedan speciellt denna utveckling i fallet $f(x) = e^{2x}$.

P **1.2** Skriv upp Taylors formel för utvecklingen av en given funktion $f(x)$ till ordning 3 kring $x = -1$ med restterm på ovanstående form (av ordning 4). Beräkna sedan speciellt denna utveckling i fallet $f(x) = \cos(\pi x)$.

P **1.3** Skriv upp Taylors formel för utvecklingen av en given funktion $f(x)$ till ordning 2 kring $x = 3$ med restterm på ovanstående form (av ordning 3). Beräkna sedan speciellt denna utveckling i fallet $f(x) = \sqrt{x}$.

P **1.4** Härled Maclaurinutvecklingar av de elementära funktionerna nedan till den angivna ordningen.

(a) e^x till ordning 4.

(b) $\cos x$ till ordning 5 (notera att termen av ordning 5 blir 0).

(c) $\sin x$ till ordning 6 (notera att termen av ordning 6 blir 0).

(d) $\arctan x$ till ordning 4 (notera att termen av ordning 4 blir 0).

(e) $\ln(1+x)$ till ordning 3.

(f) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ till ordning 3.

P **1.5** Betrakta funktionen $f(x) = \cos x + \arctan x$. Om vi Maclaurinutvecklar denna till ordning 4 direkt med formeln får vi $f(x) = 1 + x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/24 + b(x)x^5$. Å andra sidan fick vi i föregående uppgift fram $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + b(x)x^6$ och $\arctan x = x - x^3/3 + b(x)x^5$. Det är ju dock ett problem att vi har uttrycket $b(x)$ på flera ställen nu. Är dessa samma funktioner i alla dessa tre fall, och om inte hur förhåller de sig till varandra?

****

P **1.6** Även om vi inte kommer jobba så mycket med Lagranges restterm i kursen är det bra att ha sett lite vad den kan vara bra till. Vi börjar med att påminna om att detta är en mer precis form av resttermen, där vi använder att funktionen $b(x)$ ovan är på formen

$$b(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

för någon punkt $\xi(x)$ mellan a och x. Notera här att påståendet är att det finns minst en sådan punkt $\xi(x)$ för varje givet x, men vi vet i praktiken inte mer än att den ligger någonstans mellan a och x.

Låt nu $f(x) = \cos(x)$. Om vi Maclaurinutvecklar denna till ordning 5 med Lagranges restterm noterar vi enligt ovanstående uträkning i 1.4b och det faktum att $f^{(6)}(x) = -\cos x$, att vi har

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\cos(\xi(x))}{720}x^6 \text{ för något } \xi(x) \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Skriv ut vad detta innebär om vi sätter in $x = 1$. Använd sedan detta för att approximera $\cos 1$ med ett rationellt tal, och visa att felet i denna uppskattning som vi får är som högst $1/720$.

2 Lektion 2

P **2.1** Låt $f(x) = x^4$.

(a) Bestäm Taylorutvecklingen, direkt med Taylors formel, av ordning 3 till $f(x)$ kring $x = 1$ med restterm på ordoform (av ordning 4).

(b) Gör variabelbytet $x = 1 + h$, dvs. $h = x - 1$, i formeln du fått fram i (a)-uppgiften.

(c) En direkt uträkning med binomialformeln ger

$$f(1 + h) = (1 + h)^4 = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4.$$

Kan man se utvecklingen av $f(x)$ som togs fram i (a) från detta uttryck?

P **2.2** Förenkla följande uttryck till formen $p(x) + \mathcal{O}(x^n)$, där $p(x)$ är ett polynom och resttermen är den bästa möjliga (största möjliga heltal n), som vanligt för x nära 0:

(a) $\big(1 + x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)\big) - \big(x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)\big) + \big(2 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)\big)$

(b) $\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)$

(c) $\big(x - x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)\big)^3$

P **2.3** Förenkla $\mathcal{O}(t^4)$ till $\mathcal{O}(x^n)$ med största möjliga heltal n om (a) $t = -x$ (b) $t = 2x^2$ (c) $t = 3x + x^2$ (d) $t = -x^3/2 + \mathcal{O}(x^4)$ (e) $t = \mathcal{O}(x)$ (f) $t = \mathcal{O}(x^3)$

P **2.4** Använd standardutvecklingar för att bestämma Maclaurinutvecklingen till och med grad 4 med restterm i ordoform (d.v.s. $\mathcal{O}(x^5)$ eller högre) till följande funktioner.
(a) e^{-x} (b) $\sin 2x$ (c) $x \arctan x$ (d) $(1 + x)^{-1}$ (e) $\cos(x^2)$ (f) $\ln(1 - x^2)$.

P **2.5** Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med rest i ordoform till $f(x)$ då

(a) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$

(b) $f(x) = \ln(2 - x)$

(c) $f(x) = \cos(2x + \pi/2)$

(d) $f(x) = \exp(1 - 2x^2)$

Beräkna även med hjälp av utvecklingarna derivatorna $f^{(3)}(0)$ och $f^{(4)}(0)$.

P **2.6** Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 med restterm på ordoform (av ordning 4) till funktionerna $e^{\sin x}$ och $e^{\cos x}$.

****

P **2.7** Räkna ut derivatorna $f^{(17)}(0)$ och $f^{(18)}(0)$ för $f(x) = x \cos x^2$

P **2.8** Att beräkna långa Maclaurinutvecklingar av sammansatta funktioner kan bli arbetsamt om man inte går systematiskt till väga. Vi ska här utveckla $\ln(1 + x^2 + \sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$ genom att utveckla $\ln(1 + t)$ med $t = x^2 + \sin x$; notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$.

(a) Maclaurinutveckla $t = x^2 + \sin x$ till och med grad 4 i x, alltså med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(b) Maclaurinutveckla $\ln(1 + t)$ till och med grad 4 i t, alltså med rest $\mathcal{O}(t^5)$.

(c) Bestäm i tur och ordning utvecklingarna för $t^2 = t \cdot t$, $t^3 = t^2 \cdot t$, $t^4 = t^3 \cdot t$, $\mathcal{O}(t^5)$, alla uttryckta i x och med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(d) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $\ln(1 + x^2 + \sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

P **2.9** Man kan härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 6 för $\tan x$ med restterm i ordoform genom att ansätta en utveckling

$$\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

och sedan bestämma koefficienterna i utvecklingen med hjälp av kända utvecklingar och enkla samband.

(a) Motivera varför inga termer med jämna gradtal behövs i ansatsen.

(b) Använd standardutvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ och identiteten $\cos x \tan x = \sin x$ för att bestämma koefficienterna c_1, c_3, c_5 och därmed utvecklingen för $\tan x$.

(c) Som alternativ till metoden i (b), använd standardutvecklingen för $\arctan x$ och identiteten $\tan(\arctan x) = x$ för att bestämma utvecklingen för $\tan x$.

(d) Använd den i (b) eller (c) erhållna utvecklingen för $\tan x$ för att härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 7 för $\ln(\cos x)$ med restterm i ordoform. Ledning: Derivera!

3 Lektion 3

P **3.1** Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{\ln(1 - x^2)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{(\arctan x)^2}$.

P **3.2** Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \cos \frac{1}{x}}{\sin \frac{1}{x} - \tan \frac{1}{x}}$.

P **3.3** Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt[3]{x} - 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to \infty} (t^2(\ln(1 + t) - \ln t) - t)$

P **3.4** Bestäm alla värden på konstanten a sådana att

$$\frac{e^{ax} - \cos \sqrt{x}}{x^2 + x^4}$$

har ändligt gränsvärde då $x \to 0^+$, samt bestäm gränsvärdet för dessa värden på a.

****

P **3.5** Undersök $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right)$.

P **3.6** Räkna, för varje reellt tal a, ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax) - \ln(1 + x)}{e^{ax} - 1 - x + x^2/2}.$$

4 Lektion 4

P **4.1** Om $f(x)$ ges av följande uttryck, avgör om f har lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i $x = 0$: (a) $2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (b) $-2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (c) $2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
(d) $-2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ (e) $5 + x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ (f) $3 + \mathcal{O}(x^2)$

P **4.2** Givet att funktionen $f(x)$ uppfyller $f(2+h) = 1+6h^4+\mathcal{O}(h^5)$ avgör om f har en lokal extrempunkt i $x = 2$ (eller om informationen inte räcker för att avgöra frågan).

P **4.3** Undersök om $f(x) = 1 + (\arctan x)^2 - \ln(1 + x^2)$ har en lokal extrempunkt (dvs. lokalt maximum eller minimum) i $x = 0$.

P 4.4 Avgör om $f(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 0$ då

(a) $f(x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) - x$

(b) $f(x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) - x + \dfrac{x^3}{6}$.

P 4.5 Avgör om $f(x) = e^{(x-1)^4} - \cos((x-1)^2)$ har en lokal extrempunkt i $x = 1$ (och ange i så fall vilken typ).

****

P 4.6 Vi påminner om andraderivatatestet för lokala extrempunkter som säger att om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$ (respektive < 0) då har f ett lokalt minimum (respektive maximum) i a. Hur hänger detta ihop med vår metod med Taylorutvecklingar?

6 Lektion 6

P 6.1 Visa att $y = x^2 + Ce^{2x}$ uppfyller differentialekvationen $y' - 2y = 2x - 2x^2$ för varje C, samt bestäm den lösning som uppfyller bivillkoret $y(0) = 1$.

P 6.2 Bestäm alla lösningar till de linjära differentialekvationerna

(a) $y' + 2xy = x$

(b) $(1 + x^2)y' + 2xy = 2x$

(c) $xy' + 2y = \sin x,\ x > 0$

(d) $2xy' - y = 3x^2,\ x > 0$.

P 6.3 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $2xy' - y = 3x^2$, $x > 0$ (uppgift P 6.2d) sådana att (a) $y(1) = 0$ (b) $y'(4) = 0$

P 6.4 Betrakta differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$ på intervallet $x > 0$.

(a) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till differentialekvationen i det angivna intervallet. Rita lösningsskaran.

(b) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(2, -3)$.

P 6.5 Lös integralekvationerna

(a) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt$ (b) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_x^4 y(t)\,dt$ (c) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^4 y(t)\,dt$.

P 6.6 Lös integralekvationen $\displaystyle\int_0^x y(t)\,dt + (x^2 + 1)y(x) = 2$.

****

P 6.7 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y'(x) - y(x) = \ln x$, $x > 0$.

P 6.8 Betrakta differentialekvationen

$$y' + g(x)y = h(x),$$

där g och h är kontinuerliga funktioner och $g(a) \neq 0$, där a är en given konstant. Till varje lösningskurva dras tangenten i lösningskurvans skärningspunkt med linjen $x = a$. Visa att alla dessa tangenter har en gemensam punkt, och bestäm denna.

7 Lektion 7

P **7.1** Visa att $y = 2\ln x$ är en lösning till differentialekvationen $x(y' + e^y) = x^3 + 2$, $x > 0$.

P **7.2** Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' + 4x^3y^2 = 0$ som är sådan att

(a) $y(1) = 1/2$ (b) $y(1) = 1$ (c) $y(1) = -1/15$ (d) $y(1) = 0$.

För vilka x existerar lösningarna?

P **7.3** Bestäm en lösning till differentialekvationen $x^2y' = y^2 + 2y + 1$ för vilken gäller

(a) $y(-1) = 1$ (b) $y(-1) = -1$.

P **7.4** Bestäm en lösning till differentialekvationen $y' = \dfrac{1+y}{x^2+x}$ som uppfyller kravet

(a) $y(-2) = 1$ (b) $y(1) = -1$ (c) $y(1) = -2$ (d) $y(-1/2) = 0$.

Rita lösningskurvorna!

P **7.5** Differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$, $x > 0$, från uppgift P 6.4a är också separabel. Lös den med separation och jämför med din tidigare lösning.

P **7.6** Bestäm en lösning till differentialekvationen $e^y(1 + y') = 1$ som uppfyller $y(0) = \ln 3$.

P **7.7** Lös integralekvationen $x - 2 + y(x) = \displaystyle\int_x^2 y(t)^2\,dt$.

****

P **7.8** Bestäm en lösning till $y' = \cos^2 y$ för vilken $y(1) = \pi$. Rita lösningskurvan.

8 Lektion 8

P **8.1** Lös följande differentialekvationer

(a) $y'' + y' - 2y = 0$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(c) $y'' + 16y = 0$

(d) $y'' + 6y' + 25y = 0$

P **8.2** Lös differentialekvationen (a) $y'' + 2y' + 5y = 0$ (b) $y'' + 2y = 0$.

Bestäm speciellt de lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

P **8.3** Bestäm samtliga lösningar till

(a) $y'' - y = x^2 + 1$

(b) $y'' - 3y' = x^2 - 2x$

P **8.4** Bestäm samtliga lösningar till

(a) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$

(b) $y^{(4)} - 8y'' - 9y = 0$

P **8.5** Bestäm alla lösningar till differentialekvationerna

(a) $y' - 3y = 0$ (b) $y'' + 2y' = 0$ (c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ (d) $y^{(4)} - y'' = 0$.

P **8.6** Lös följande differentialekvationer

(a) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 4 - 2x$

(b) $y''' - y'' - 2y' = 4x + 5$

P **8.7** Lös differentialekvationerna

(a) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{5x}$

(b) $y'' + 2y' - 8y = e^{-4x}$

P **8.8** Lös differentialekvationerna

(a) $y'' - 3y' + 2y = e^{x} + 8x$

(b) $y'' + 2y' + y = 4e^{x} - 2e^{-x}$

****

P **8.9** Bestäm den lösning till $y'' - 2y' = x^2e^{2x}$ som uppfyller bivillkoren $y(0) = y'(0) = 2$.

P **8.10** Betrakta ekvationen med bivillkor

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0,\, y(1) = 0.$$

Oavsett värde på λ finns alltid den så kallade triviala lösningen $y = 0$. Avgör för vilka λ som det finns andra lösningar förutom denna.

9 Lektion 9

P **9.1** Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 9y = 50\cos x$.

P **9.2** Lös differentialekvationen $y''' - y = 3e^{x} + 2\sin x$.

P **9.3** Lös differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\cos x$.

P **9.4** (a) Verifiera att $y = x^2\ln x$ är *en* lösning till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.

(b) Bestäm *alla* lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.

(c) Bestäm alla lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x$.

P **9.5** Ange en differentialekvation som har den allmänna lösningen
(a) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x}$ (b) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x} - \cos x$
(c) $y = (A + x)e^{x} + (B + Cx)e^{-x}$ (d) $y = Ae^{-2x} + e^{-x}(1 + B\cos 3x + C\sin 3x)$.

P **9.6** Lös differentialekvationen $y'' + y = h(x)$ då
(a) $h(x) = 6\cos 2x - 3\sin 2x$ (b) $h(x) = \cos x$ (c) $h(x) = \sin x$
(d) $h(x) = 6\cos x - 3\sin x$ (e) $h(x) = x\cos x$ (f) $h(x) = \cos x\sin x$

****

P **9.7** Betrakta differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 2\sin x$.

(a) Bestäm den lösningskurva som tangerar x-axeln i origo.

(b) Vilka lösningar har lokalt maximum för $x = 0$?

10 Lektion 10

P **10.1** (a) Beräkna längden av parameterkurvan

$$\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = t^3 - 1, \quad 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

(b) Beräkna längden av parameterkurvan

$$\begin{cases} x = e^{2u} + 2, \\ y = e^{3u} - 1, \quad 0 \le u \le \ln 2. \end{cases}$$

(c) Beräkna längden av kurvan $y = (x-2)^{3/2} - 1$, $3 \le x \le 6$.

(d) Svaret i alla ovanstående uppgifter blev samma. Är det en tillfällighet?

P **10.2** Bestäm arean av det område som ligger i första kvadranten och som begränsas av de tre kurvorna $y = 2/x$, $y = 2x$ och $y = x/8$.

P **10.3** Beräkna arean av det område som begränsas av x-axeln och kurvan $y = (x^2 - 2x)e^x$.

P **10.4** Bestäm arean av det område som i polära koordinater ges av $0 \le r \le \cos^2 \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

P **10.5** Beräkna längden av den kurva som i polära koordinater ges av $r = 2\varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

****

P **10.6** Kossan Rosa är bunden med ett snöre vid ett träd. Snöret har längden L och det cylindriska trädet har radien R. I startögonblicket står Rosa med snöret fullt sträckt, rakt radiellt ut från trädet. Rosa börjar vandra runt trädet, hela tiden med sträckt snöre. Hur långt har hon gått då hon kommer in till stammen? (Såväl snörets tjocklek som Rosas utsträckning försummas.)

11 Lektion 11

P **11.1** Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området $0 \le y \le \sin 2x$, $\pi/4 \le x \le \pi/2$ roterar ett varv kring

(a) x-axeln (b) y-axeln.

P **11.2** Bestäm, med hjälp av metoderna för rotationsvolymer, en formel för volymen av en kon med cirkulärt tvärsnitt som har höjden h och basradien R.

P **11.3** Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och uppfyller $0 \le f(x) \le 2$ på intervallet $[1, 3]$. Teckna en integral som ger volymen av den kropp som uppkommer då området som ges av olikheterna

$$1 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le f(x)$$

roteras ett varv kring

(a) linjen $x = 4$

(b) linjen $y = -2$

(c) linjen $x = -1$

(d) linjen $y = 3$.

P **11.4** Området som ges av $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x^2$ roteras ett varv kring x-axeln. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer genom att

(a) teckna en integral med integration med avseende på x

(b) teckna en integral med integration med avseende på y.

P **11.5** Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då området $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^3$ roterar ett varv kring linjen $x = 3$.

P **11.6** Området som ges av olikheterna $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ roteras ett varv kring linjen $y = 3$. Hur stor blir volymen av den kropp som uppkommer?

****

P **11.7** Ett klot med radien R delas i två delar av ett plan, där (kortaste) avståndet mellan planet och klotets centrum är $d > 0$. Beräkna volymen av den minsta delen.

12 Lektion 12

P **12.1** Antag att funktionen f uppfyller $0 \leq f(x) \leq 2$ och att f' är kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$. Teckna en integralen som ger rotationsarean då kurvan

$$y = f(x), \quad 1 \leq x \leq 2$$

roteras ett varv kring

(a) x-axeln

(b) y-axeln

(c) linjen $x = -1$

(d) linjen $y = 3$.

P **12.2** Beräkna mantelarean av en kon (inklusive bottenytan) med höjden h och basradien R.

P **12.3** Halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, roteras ett varv kring linjen $x = 2R$. Beräkna arean av den rotationsyta som uppkommer.

P **12.4** Antag att f är en kontinuerligt deriverbar och strängt avtagande funktion på intervallet $[-1, 3]$ samt att $f(-1) = 4$ och $f(3) = -2$. Låt D vara det begränsade område som avgränsas av kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = -1$ och $y = -2$.

(a) Rita en principskiss av D och ange arean av D som en integral.

(b) Låt K_b vara den rotationskropp som uppstår då D roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Ange kroppens volym V_b och arean A_b av kroppens begränsningsyta som integraler. Notera att den cirkulära bottenplattans area ingår i A_b, och den behöver inte anges som en integral.

(c) Låt K_c vara den rotationskropp som uppstår då D i stället roteras ett varv kring linjen $y = -3$. Ange kroppens volym V_c och arean A_c av kroppens begränsningsyta som integraler. De triviala delarna av A_c behöver dock inte anges som integraler.

****

P **12.5** Givet att två parallella plan med inbördes avstånd h båda skär en given sfär med radie R, bestäm arean av den del av sfären som ligger mellan dessa plan.

Svar

Lektion 1

P **1.1** $f(x) = f(2)+f'(2)(x-2)+\dfrac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+b(x)(x-2)^3$, $e^{2x} = e^4+2e^4(x-2)+2e^4(x-2)^2+b(x)(x-2)^3$

P **1.2** $f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \dfrac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \dfrac{f^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3 + b(x)(x+1)^4$, $\cos(\pi x) = -1 + \dfrac{\pi^2}{2}(x+1)^2 + b(x)(x+1)^4$

P **1.3** $f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \dfrac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + b(x)(x-3)^3$, $\sqrt{x} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-3) - \dfrac{1}{24\sqrt{3}}(x-3)^2 + b(x)(x-3)^3$

P **1.4** (a) $e^x = 1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+b(x)x^5$ (b) $\cos x = 1-x^2/2+x^4/24+b(x)x^6$ (c) $\sin x = x-x^3/6+x^5/120+b(x)x^7$ (d) $\arctan x = x-x^3/3+b(x)x^5$ (e) $\ln(1+x) = x-x^2/2+x^3/3+b(x)x^4$ (f) $\sqrt{1+x} = 1+x/2-x^2/8+x^3/16+b(x)x^4$

P **1.5** Nej, det är tre olika funktioner, och man måste vara noga med att i samma uppgift döpa dem till olika saker! T ex om vi istället kallar de i utvecklingarna för $\cos x$ och $\arctan x$ för $b_1(x)$ respektive $b_2(x)$, dvs. $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + b_1(x)x^6$ och $\arctan x = x - x^3/3 + b_2(x)x^5$, då får vi $\cos x + \arctan x = (1 - x^2/2 + x^4/24 + b_1(x)x^6) + (x - x^3/3 + b_2(x)x^5) = 1 + x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/24 + (b_1(x)x + b_2(x))x^5 = 1 + x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/24 + b(x)x^5$.

P **1.6** $\cos 1 = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{24}-\dfrac{\cos(\xi(x))}{720} = \dfrac{13}{24}-\dfrac{\cos(\xi(x))}{720}$. Alltså får vi $|\cos 1-13/24| = \left|-\dfrac{\cos(\xi(x))}{720}\right| \le 1/720$ eftersom $|\cos(\xi(x))| \le 1$. Så $13/24$ approximerar $\cos 1$ med ett fel vars absolutbelopp är som högst $1/720$.

Lektion 2

P **2.1** (a) $f(x) = x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)$ (då $x \to 1$).
(b) $f(1+h) = 1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + \mathcal{O}(h^4)$
(c) Ja, eftersom $h^4 = \mathcal{O}(h^4)$ får vi med $h = x-1$ att $x^4 = 1+4(x-1)+6(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)$. Entydighetssatsen för Taylorutvecklingar säger nu att det sista uttrycket måste vara Taylorutvecklingen av x^4 till ordning 3.

P **2.2** (a) $3 - 5x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ (b) $x^2 - 2x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^3 - 3x^4 + 6x^5 + \mathcal{O}(x^6)$

P **2.3** (a) $\mathcal{O}(x^4)$ (b) $\mathcal{O}(x^8)$ (c) $\mathcal{O}(x^4)$ (d) $\mathcal{O}(x^{12})$ (e) $\mathcal{O}(x^4)$ (f) $\mathcal{O}(x^{12})$

P **2.4** (a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $2x - \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$

(d) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (e) $1 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^8)$ (f) $-x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$

(Ska man vara noga betyder utveckling av ordning 4 att det ska vara $\mathcal{O}(x^5)$, och t.ex. är utvecklingen i (c) ovan egentligen av ordning 5. Men man brukar inte minska graden man får fram i onödan.)

P **2.5** (a) $f(x) = 3 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{216} + \mathcal{O}(x^6)$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -1/9$

(b) $\ln 2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^4}{64} + \mathcal{O}(x^5)$, $f^{(3)}(0) = -1/4$, $f^{(4)}(0) = -3/8$

(c) $-2x + \dfrac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $f^{(3)}(0) = 8$, $f^{(4)}(0) = 0$

(d) $e - 2ex^2 + 2ex^4 + \mathcal{O}(x^6)$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 48e$

P 2.6 $e^{\sin x} = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ $\quad e^{\cos x} = e - ex^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$. (Vi observerar att det alltså inte fungerar att sätta $t = \cos x$ i utvecklingen för e^t helt enkelt eftersom, $\cos x \not\to 0$ då $x \to 0$, utan vi har $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}((\cos x)^4)$ då $x \to 0$.)

P 2.7 $f^{(17)}(0) = 17!/8!$ $\quad (= 8821612800)$, $f^{(18)}(0) = 0$

P 2.8 (a) $t = x^2 + \sin x = x + x^2 - \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$ $\qquad$ (b) $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \mathcal{O}(t^5)$

(c) $t^2 = x^2 + 2x^3 + \dfrac{2x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $\quad t^3 = x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $\quad t^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $\quad \mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5)$

(d) $\ln(1 + x^2 + \sin x) = \ln(1+t) = \ldots = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{5x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)$

P 2.9 (a) $\tan x$ är udda $\quad$ (b,c) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$ $\quad$ (d) $\ln(\cos x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + \mathcal{O}(x^8)$

Lektion 3

P 3.1 (a) $-1/2$ $\quad$ (b) -2 $\quad$ (c) $1/2$

P 3.2 (a) 0 $\quad$ (b) $1/2$ $\quad$ (c) $1/3$

P 3.3 (a) 6 $\quad$ (b) $-1/2$

P 3.4 $a = -1/2$ ger gränsvärdet $1/12$

P 3.5 Gränsvärdet existerar och är 1

P 3.6 1 om $a \neq 1$, $1/2$ om $a = 1$

Lektion 4

P 4.1 (a) Lokalt minimum: $2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(b) Lokalt minimum: $-2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(c) Lokalt maximum: $2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(d) Lokalt maximum: $-2 - x^2 + \mathcal{O}(x^3) = -2 + x^2\big(-1 + \mathcal{O}(x)\big)$

(e) Ingetdera: $5 + x^3 + \mathcal{O}(x^5) = 5 + x^3\big(1 + \mathcal{O}(x^2)\big)$

(f) Vi vet för lite för att kunna avgöra frågan (vi vet ju inget om tecknet på $\mathcal{O}(x^2)$)

P 4.2 Lokalt mimimum (notera att med $h = x - 2$ gäller $f(x) = f(2+h) = 1 + 6h^4 + \mathcal{O}(h^5) = 1 + h^4(6 + \mathcal{O}(h)))$

P 4.3 Lokalt maximum i $x = 0$

P 4.4 (a) Ej lokal extrempunkt ($f(x) = x^3(-1/6 + \mathcal{O}(x))$ då $x \to 0$).
(b) Lokalt mimimum ($f(x) = x^4(1/8 + \mathcal{O}(x))$ då $x \to 0$).

P 4.5 Lokalt minimum: $f(1+h) = e^{h^4} - \cos(h^2) = h^4(3/2 + \mathcal{O}(h^4))$

P 4.6 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$. Om $f'(a) \neq 0$ har den ledande ickekonstanta termen grad 1 (dvs. udda) så $f(a+h) - f(a)$ växlar tecken när vi går från $h < 0$ till $h > 0$. Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) \neq 0$ så har vi $f(a+h) = f(a) + h^2(f''(a)/2 + \mathcal{O}(h))$, där termen innanför parentesen inte växlar tecken för små h, och tecknet på $f''(a)$ avgör om det blir ett lokalt max eller min.

Lektion 6

P **6.1** $y = x^2 + e^{2x}$ (dvs. $C = 1$)

P **6.2** (a) $y = \dfrac{1}{2} + C \exp(-x^2)$

(b) $y = 1 + \dfrac{C}{1 + x^2}$

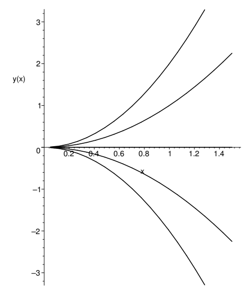
(c) $y = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}$

(d) $y = x^2 + C\sqrt{x}$

P **6.3** (a) $y = x^2 - \sqrt{x}$ (b) $y = x^2 - 32\sqrt{x}$

P **6.4** (a) Integrerande faktor $\dfrac{1}{x^2}$; allmän lösning $y = Cx^2$, $x > 0$

(b) $y = -\dfrac{3x^2}{4}$, $x > 0$



P **6.5** (a) $y(x) = 3\,e^x$ (b) $y(x) = 3\,e^{4-x}$ (c) $y(x) = -1$ (konstant funktion)

P **6.6** $y = 2e^{-\arctan x}/(x^2 + 1)$

P **6.7** $y = (Cx - 1 - \ln x)/(x + 1)$

P **6.8** Den gemensamma punkten är $\left(a + \dfrac{1}{g(a)}, \dfrac{h(a)}{g(a)}\right)$

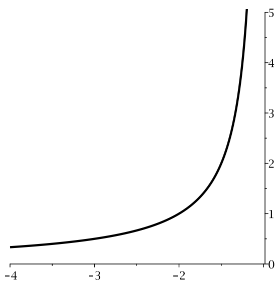
Lektion 7

P **7.2** (a) $y = \dfrac{1}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $y = \dfrac{1}{x^4}$, $x > 0$ (c) $y = \dfrac{1}{x^4 - 16}$, $|x| < 2$ (d) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$

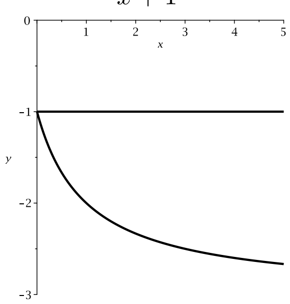
P **7.3** (a) $y(x) = -\dfrac{x + 2}{3x + 2}$, $x < -\dfrac{2}{3}$ (b) $y(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$

P **7.4** (a) $y = -\dfrac{1}{x + 1}$, $x < -1$ (b) $y = -1$, $x > 0$ (d) $y = -\dfrac{2x + 1}{x + 1}$, $-1 < x < 0$

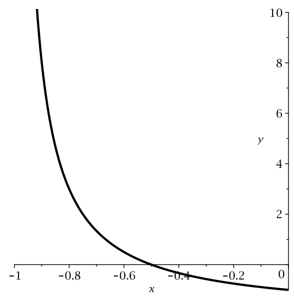
(c) $y = -\dfrac{3x + 1}{x + 1}$, $x > 0$



a



bc

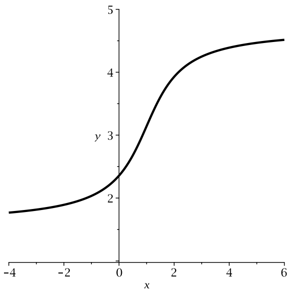


d

P **7.6** $y = \ln(2e^{-x} + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

P **7.7** $y(x) = \tan(2 - x)$, $2 - \pi/2 < x < 2 + \pi/2$

P **7.8** $y(x) = \arctan(x-1) + \pi, \quad x \in \mathbb{R}$



Lektion 8

P **8.1** (a) $y = Ae^x + Be^{-2x}$

(b) $y = (A + Bx)e^{-2x}$

(c) $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

(d) $y = e^{-3x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$

P **8.2** (a) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, speciellt $y = e^{-x}\big(\cos 2x - (\sin 2x)/2\big)$

(b) $y = A\cos\big(x\sqrt{2}\big) + B\sin\big(x\sqrt{2}\big)$, speciellt $y = \cos\big(x\sqrt{2}\big) - \sqrt{2}\sin\big(x\sqrt{2}\big)$

P **8.3** (a) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 3$

(b) $y = C_1 + C_2e^{3x} + \dfrac{4}{27}x + \dfrac{2}{9}x^2 - \dfrac{1}{9}x^3$

P **8.4** (a) $y = C_1e^{-3x} + (C_2x + C_3)e^x$

(b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos x + C_4\sin x$

P **8.5** (a) $y = Ae^{3x}$ (b) $y = A + Be^{-2x}$ (c) $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x}$ (d) $y = A + Bx + Ce^x + De^{-x}$

P **8.6** (a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-x} + x/2 - 3/2$

(b) $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} - x^2 - 3x/2$

P **8.7** (a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \dfrac{2}{27}e^{5x}$

(b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} - \dfrac{x}{6}e^{-4x}$

P **8.8** (a) $y = (C_1 - x)e^x + C_2e^{2x} + 4x + 6$

(b) $y = (C_1 + C_2x - x^2)e^{-x} + e^x$

P **8.9** $y(x) = \dfrac{1}{24}\left(4x^3 - 6x^2 + 6x + 21\right)e^{2x} + \dfrac{9}{8}$

P **8.10** Icketriviala lösningar finns enbart om $\lambda = k^2 = n^2\pi^2$ för $n = 1, 2, 3, \ldots,$. Lösningarna är då på formen $y = C\sin(n\pi x)$. (Denna typ av ekvation med $\lambda = k^2$ dyker upp då man vill beskriva vilka toner en svängande sträng på ett instrument kan generera, där $n = 1$ ger grundtonen, $n = 2, 3, \ldots$ ger övertonerna.)

Lektion 9

P **9.1** $y = (C_1x + C_2)e^{-3x} + 4\cos x + 3\sin x$

P **9.2** $y = C_1e^x + e^{-x/2}\Big(C_2\cos(\sqrt{3}x/2) + C_3\sin(\sqrt{3}x/2)\Big) + xe^x + \cos x - \sin x$

P **9.3** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (3\sin x + \cos x)e^{3x}/10$

P **9.4** (b) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x$ (c) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x - x - 1/2$

P **9.5** (a) $y'' + y' - 12y = 0$ (b) $y'' + y' - 12y = 13\cos x + \sin x$

(c) $y''' + y'' - y' - y = 4e^x$ (d) $y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 9e^{-x}$

P **9.6** $y = y_h + y_p$, där $y_h = A\cos x + B\sin x$ i samtliga deluppgifter och

(a) $y_p = -2\cos 2x + \sin 2x$ (b) $y_p = (x\sin x)/2$ (c) $y_p = -(x\cos x)/2$

(d) $y_p = (3x\cos x + 6x\sin x)/2$ (e) $y_p = (x^2\sin x + x\cos x)/4$ (f) $y_p = -(\sin 2x)/6$

P **9.7** (a) $y = (x+1)e^{-x} - \cos x$ (b) $y = C(x+1)e^{-x} - \cos x$, $C > 1$

Lektion 10

P **10.1** (a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt = (80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})/27.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{(2e^{2u})^2 + (3e^{3u})^2}\,du = (80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})/27.$

(c) $\displaystyle\int_3^6 \sqrt{1 + (3\sqrt{x-2}/2)^2}\,dx = (80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})/27.$

(d) Nej det är ingen tillfällighet. I alla tre fall parametriseras samma kurva, fast med olika parametrar ($x = t^2 + 2 = e^{2u} + 2$, eller ekvivalent $t = e^u = \sqrt{x-2}$).

P **10.2** $4\ln 2$

P **10.3** $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)e^x\,dx = 4$

P **10.4** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^4\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3\pi}{16}$

P **10.5** $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{(2\varphi^2)^2 + (4\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{2}{3}\left(\left(4+\pi^2\right)^{3/2} - 8\right)$

P **10.6** $\displaystyle\frac{\pi L}{2} + \int_0^{L/R} (L - R\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi L}{2} + \frac{L^2}{2R}$

Lektion 11

P **11.1** (a) $\displaystyle\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx = \frac{\pi^2}{8}$

(b) $\displaystyle 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\sin 2x\,dx = \frac{\pi^2 - \pi}{2}$

P **11.2** Det går att ställa upp på flera sätt, men man kan t ex rotera $0 \le y \le Rx/h$, $0 \le x \le h$ runt x-axeln, vilket ger $\displaystyle\pi\int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2 h}{3}$

P **11.3** (a) $\displaystyle 2\pi\int_1^3 (4-x)f(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\pi\int_1^3 ((f(x)+2)^2 - 2^2)\,dx$

(c) $\displaystyle 2\pi\int_1^3 (1+x)f(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\pi\int_1^3 (3^2 - (3 - f(x))^2)\,dx$

P **11.4** (a) $\displaystyle\pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx = 32\pi/5$

(b) $\displaystyle 2\pi\int_0^4 y(2 - \sqrt{y})\,dy = 32\pi/5$

P **11.5** $\displaystyle 2\pi\int_0^1 (3-x)x^3\,dx = 11\pi/10$

P **11.6** $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi(3^2 - (3 - \sin x)^2)\, dx = \pi(24 - \pi)/2.$

P **11.7** $\displaystyle\pi \int_d^R (R^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3dR^2 + d^3)$

Lektion 12

P **12.1** (a) $\displaystyle 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

(b) $\displaystyle 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

(c) $\displaystyle 2\pi \int_1^2 (x+1)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

(d) $\displaystyle 2\pi \int_1^2 (3 - f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

P **12.2** Man kan t ex ställa upp det genom att rotera kurvan $y = Rx/h$, $0 \le x \le h$ runt x-axeln, samt lägga till bottenytan som är en cirkelskiva med radie R, vilket ger $\displaystyle 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}\, dx + \pi R^2 = \pi(R\sqrt{R^2 + h^2} + R^2)$.

P **12.3** $\displaystyle 2\pi \int_{-R}^R (2R - x)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi^2 R^2$

P **12.4** (a) Arean av D är $\displaystyle\int_{-1}^3 \big(f(x) + 2\big)dx$

(b) $\displaystyle V_b = \int_{-1}^3 2\pi(x+1)\big(f(x) + 2\big)\, dx,\ \ A_b = \int_{-1}^3 2\pi(x+1)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx + \pi \cdot 4^2$

(c) $\displaystyle V_c = \int_{-1}^3 \Big(\pi\big(f(x) + 3\big)^2 - \pi \cdot 1^2\Big)\, dx,$

$\displaystyle A_c = \int_{-1}^3 2\pi\big(f(x) + 3\big)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx + 2\pi \cdot 1 \cdot 4 + (\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 1^2)$

P **12.5** $\displaystyle 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi Rh$