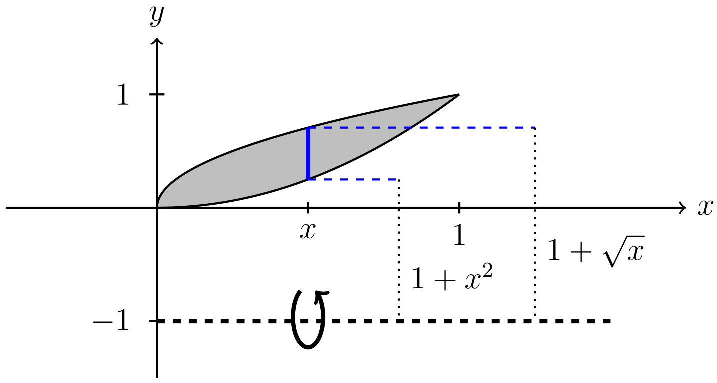
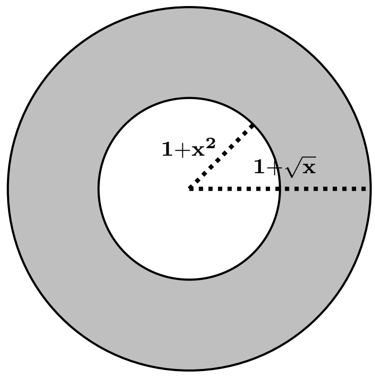
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2022-06-04

1. (a) Vi börjar med att rita en figur. Kurvorna skär varandra när $x = 0$ och när $x = 1$. För $0 < x < 1$ så är $x^2 < \sqrt{x}$.



Rotationsvolymen som uppstår då området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, roterar ett varv kring $y = -1$ kan beräknas med hjälp av skivformeln enligt

Ett tvärsnitt vid x:



$$\pi \int_0^1 \left((\sqrt{x}+1)^2 - (x^2+1)^2\right) dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x + 2\sqrt{x} - x^4 - 2x^2\right) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{29\pi}{30}.$$

(b) Bågelementet för $r = 2\sin\varphi$ finner vi i polära koordinater enligt

$$ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = \sqrt{4\sin^2\varphi + (2\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 2\, d\varphi.$$

Kurvlängden blir därmed

$$L = \int_{\pi/6}^{2\pi/3} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2\, d\varphi = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi.$$

Svar: (a) $\dfrac{29\pi}{30}$ (b) π.

2. (a) Ekvationen är linjär och av ordning ett. Vi söker en lösning nära $x = 0$, så antag att $x > -1$. En integrerande faktor finner vi nu i form av

$$\exp\left(-\ln(x+1)\right) = \exp\left(\ln\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1},$$

så ekvationen kan ekvivalent uttryckas

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x+1}\right) = -\sin x + x\cos x.$$

Om vi integrerar högerledet ser vi att

$$-\int \sin x\,dx + \int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x - \int \sin x\,dx = 2\cos x + x\sin x + C$$

så

$$\frac{y}{x+1} = 2\cos x + x\sin x + C \quad\Leftrightarrow\quad y = (x+1)\big(2\cos x + x\sin x + C\big),$$

åtminstone så länge $x > -1$. Genom villkoret givet i uppgiften finner vi konstanten:

$$0 = y\,(0) = 2 + C \quad\Leftrightarrow\quad C = -2.$$

Svaret ges således av $y(x) = (x+1)\big(2\cos x + x\sin x - 2\big)$, $x > -1$.

(b) Genom Maclaurinutveckling av uttrycket i den andra parentesen ovan finner vi att

$$\begin{aligned} y(x) &= (x+1)\left(2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) + x\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) - 2\right) \\ &= (x+1)\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^4}{6} + O(x^6)\right) = -\frac{x^4}{12} + O(x^5) = x^4\left(-\frac{1}{12} + O(x)\right) < 0 = y(0) \end{aligned}$$

då $x \neq 0$ och litet eftersom den sista parentesen är negativ nära $x = 0$ och $x^4 > 0$ för $x \neq 0$. Följaktligen har vi ett lokalt maximum.

Svar: (a) $y(x) = (x+1)(2\cos x - x\sin x - 2)$, $x > -1$, (b) Lokalt maximum.

3. (a) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3),$$

$$\text{och} \qquad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}s^2 + O(s^3) = 1 + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} + O(s^3),$$

där vi på grund av nämnaren x^4 ser att vi behöver ha kontroll på x^4-termer i täljaren. Med hjälp av dessa utvecklingar kan vi uttrycka

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}_{=s}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + O\left(O(x^2)^3\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + O(x^6) \end{aligned}$$

och

$$e^{-x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + O(x^6) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + O(x^6),$$

så

$$\frac{\sqrt{\cos x} - e^{-x^2/4}}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{96} - \frac{x^4}{32} + O(x^6)}{x^4} = -\frac{1}{24} + O(x^2) \to -\frac{1}{24}, \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Låt $f(x) = \cos x$. Då blir

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$
$$\text{och} \quad f^{(5)}(x) = -\sin x.$$

Taylors formel kring $x = \pi/2$ (med restterm på Lagranges form) ger då att

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x-\pi/2) + \frac{f''(\pi/2)}{2}(x-\pi/2)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi/2)}{3!}(x-\pi/2)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(\pi/2)}{4!}(x-\pi/2)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-\pi/2)^5 \\ &= 0 - (x-\pi/2) + 0 + \frac{1}{3!}(x-\pi/2)^3 + 0 - \frac{\sin\xi}{5!}(x-\pi/2)^5, \end{aligned}$$

för något ξ mellan $\pi/2$ och x.

Svar: (a) $-\dfrac{1}{24}$ (b) $-(x-\pi/2) + \dfrac{1}{6}(x-\pi/2)^3 - \dfrac{\sin\xi}{120}(x-\pi/2)^5$, ξ mellan $\pi/2$ och x

4. (a) En serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges vara konvergent med summa S om $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ existerar (som ett ändligt tal).

(b) Då

$$0 \le \frac{1}{2n^2+n} \le \frac{1}{n^2}, \quad n \ge 1,$$

och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ är konvergent följer det från jämförelsesats att serien i frågan är konvergent. Vidare ser vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+n} \ge \sum_{n=1}^{3}\frac{1}{2n^2+n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{21} = \frac{101}{210}$$

eftersom alla termer i serien är positiva.

(c) Eftersom

$$\left|\frac{4^k(\ln k)\,x^{2k}}{k^3}\right|^{1/k} = 4|x|^2\frac{(\ln k)^{1/k}}{k^{3/k}} = 4|x|^2\frac{e^{(\ln\ln k)/k}}{e^{(3/k)\ln k}} \to 4|x|^2, \quad \text{då } k\to\infty,$$

så är serien enligt rotkriteriet absolutkonvergent då

$$4|x|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{2}$$

och divergent om $|x| > \dfrac{1}{2}$. Konvergensradien är således $R = \dfrac{1}{2}$.

Svar: (a) Se ovan (b) Se ovan (c) $R = \dfrac{1}{2}$.

5. (a) Ekvationen är linjär med konstanta koefficienter och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2-1)^2 = (r-1)^2(r+1)^2.$$

Således ges (enligt känd sats) lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = \big(C_1 + C_2 x\big)e^x + \big(C_3 + C_4 x\big)e^{-x}.$$

Vi söker en partikulärlösning så att

$$p(D)y_{p_1} = xe^x.$$

Vi ansätter $y_{p_1} = z(x)e^x$. Genom direkt derivering finner vi att

$$y'_{p_1} = (z' + z)e^x, \qquad y''_{p_1} = (z'' + 2z' + z)e^x$$
$$y^{(3)}_{p_1} = (z^{(3)} + 3z'' + 3z' + z)e^x, \qquad y^{(4)}_{p_1} = (z^{(4)} + 4z^{(3)} + 6z'' + 4z' + z)e^x.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(ze^x) = (z^{(4)}+4z^{(3)}+6z''+4z'+z)e^x - 2(z''+2z'+z)e^x + ze^x = (z^{(4)}+4z^{(3)}+4z'')e^x,$$

så

$$z^{(4)} + 4z^{(3)} + 4z'' = x.$$

Alternativt använder man förskjutningsregeln

$$\begin{aligned} &P(D)y_{p_1} = P(D)(z(x)e^x) = e^x P(D+1)z = xe^x \iff \\ \iff\ &P(D+1)z = ((D+1)-1)^2((D+1)+1)^2 z = D^2(D+2)^2 z = \\ & = D^2(D^2+4D+4)z = (D^4+4D^3+4D^2)z = \\ & = z^{(4)} + 4z''' + 4z'' = x. \end{aligned}$$

Då z deriveras minst två gånger måste vi ansätta ett polynom av grad 3 för att få en x-term kvar. Vi ansätter därför $z_p = Ax^3 + Bx^2$ så $24A + 24Ax + 8B = x$, vilket medför att $A = 1/24$ och $B = -1/8$. Därmed är $z_p = (x^3 - 3x^2)/24$ och $y_{p_1} = (x^3 - 3x^2)e^x/24$. För att hitta en partikulärlösning till ekvationen $P(D)y_{p_2} = \cos x$ så kan vi göra ansatsen $y_{p_2} = C\cos x + D\sin x$. Vi kan dock direkt se att vi kan låta $D = 0$, så ansatsen $y_{p_2} = C\cos x$ kommer fungera (varför?). Då blir

$$y'_{p_2} = -C\sin x, \qquad y''_{p_2} = -C\cos x, \qquad y^{(3)}_{p_2} = C\sin x, \qquad y^{(4)}_{p_2} = C\cos x.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$C\cos x - 2(-C\cos x) + C\cos x = 4C\cos x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{4}.$$

Vi har därmed funnit den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = \big(C_1 + C_2 x\big)e^x + \big(C_3 + C_4 x\big)e^{-x} + \frac{x^3 - 3x^2}{24}\,e^x + \frac{1}{4}\cos x.$$

Svar: $y = \left(C_1 + C_2 x - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{24}\right)e^x + \big(C_3 + C_4 x\big)e^{-x} + \dfrac{1}{4}\cos x,\ x \in \mathbf{R}.$

6. Notera att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \right) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k,$$

under förutsättning att serierna i högerledet är konvergenta. Den första serien i högerledet är en geometrisk serie med kvoten x och första term x, så

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

enligt känd formel. Vidare ser vi att

$$\frac{1}{k+1} x^k = \frac{1}{x} \int_0^x t^k \, dt, \quad x \neq 0,$$

så

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t^k \, dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k \right) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt = \frac{-x - \ln|1-x|}{x}, \end{aligned}$$

för $0 < |x| < 1$. Sålunda gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = \frac{x}{1-x} + \frac{x + \ln|1-x|}{x}, \quad 0 < |x| < 1,$$

och med $x = 1/2$ finner vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(k+1)} = \frac{1/2}{1-1/2} + 1 + 2\ln\frac{1}{2} = 2 - 2\ln 2.$$

Svar: $2 - 2\ln 2$.

7. Observera att vi kan uttrycka en ändlig integral som en summa enligt:

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Notera nu att

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

eftersom $|\sin x|$ är periodisk med perioden π, så vi kan uppskatta summan ovan genom

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1},$$

eftersom $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{(k+1)\pi}$ på intervallet $[k\pi,\ (k+1)\pi]$. Om vi låter $n \to \infty$ har vi nu visat att

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k},$$

eftersom integranden är icke-negativ för $x \geq \pi$. Serien i högerledet är känt divergent (den harmoniska serien). Alltså följer det att att integralen är divergent.

Svar: Se ovan.