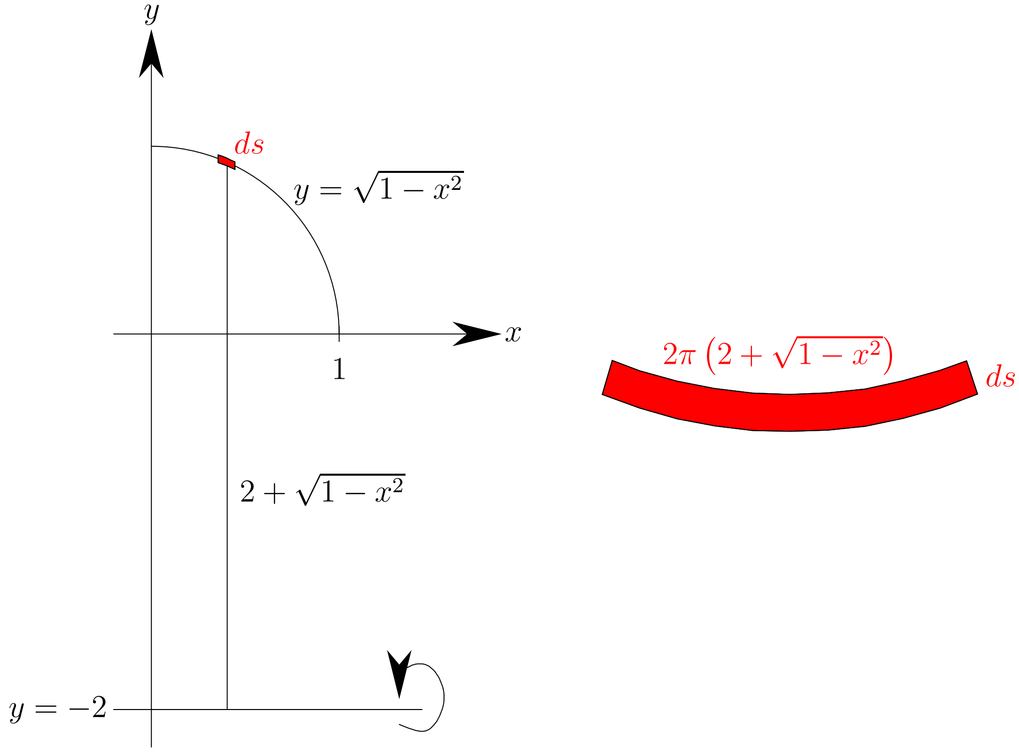
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2022-08-25

1. (a) Vi börjar med att rita en figur.



Då kurvan som roteras är en funktionskurva, $y = \sqrt{1-x^2}$, fås

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

När kurvsegmentet ds roteras ett varv kring $y = -2$ uppstår ett smalt band som är ungefär del av en stympad kon med basradie = avståndet från ds till rotationsaxeln $y = -2$, d.v.s.

$$\text{basradie} = \sqrt{1-x^2} - (-2) = 2 + \sqrt{1-x^2}.$$

Klipper vi upp detta får vi ett band liknande det i figuren ovan vilket ger oss areaelementet

$$dA = \text{omkrets} \cdot \text{bredd} = 2\pi\left(2+\sqrt{1-x^2}\right) ds = 2\pi\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right) dx$$

så att

$$A = \int dA = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right) dx \quad = 2\pi\Big[2\arcsin x + x\Big]_0^1 = 2\pi\left(2\frac{\pi}{2} + 1\right) =$$

$$= 2\pi(\pi + 1).$$

(b) Då kurvan Γ är given på parameterform blir bågelementet

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \Big[x(t) = t^2,\ y(t) = \sin t \Big] = \sqrt{4t^2 + \cos^2 t}\, dt$$

så att den sökta längden blir

$$L(\Gamma) = \int ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2 + \cos^2 t}\, dt.$$

2. (a) Integralen är generaliserad endast i ∞. Då integranden är positiv och då $\sin^2 x \leq 1$ på hela integrationsintervallet gäller

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\, dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \Big[\arctan x \Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2},$$

d.v.s. den aktuella integralen är konvergent enligt Sats 10.11 (Jämförelsesats I för generaliserade integraler), sid 456 i boken.

(b) Studera seriens termer. Om vi tänker $\frac{1}{k} = t$ inses

$$a_k = k \sin \frac{1}{k} = \frac{\sin(1/k)}{1/k} \to 1 \neq 0 \quad \text{(standardgränsvärde)}$$

då $k \to \infty$ och därmed $\frac{1}{k} \to 0^+$. Följaktligen gäller att seriens termer inte går mot 0 och serien är divergent enligt divergenstestet (Sats 10.1).

(c) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞ och måste därför delas upp, t.ex.

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx = \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx + \int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx.$$

Studera sedan delintegralerna var för sig och identifiera dominerande term i respektive integral för att sedan göra elementära uppskattningar av täljare respektive nämnare i det som återstår då den dominerande faktorn brutits ut. Vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^{5/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1+1}{1+x^{5/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \leq \int_0^1 \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \\
&= \Big[4\sqrt{x} \Big]_0^1 = 4, \\
\int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx &= \int_1^\infty \frac{1+x}{1+x^{-5/2}} \cdot \frac{1}{x^3}\, dx \leq \int_1^\infty \frac{1+x}{x^3}\, dx \leq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\
&= \Big[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \Big]_1^\infty = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

så att

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx = \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx + \int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^3}\, dx \leq 4 + \frac{3}{2} \leq 6. \qquad \text{VSB.}$$

3. Ekvationen har det karakteristiska polynomet

$$P(r) = r^3 + 3r^2 + 12r + 10$$

och vi ser att $P(-1) = 0$. Enligt faktorsatsen är då $r+1$ en faktor i $P(r)$. Polynomdivision ger då

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & & r^2 & + & 2r & + & 10 & \\ \hline r^3 & + & 3r^2 & + & 12r & + & 10 & \big| \ r+1 \\ r^3 & + & r^2 & & & & & \\ \hline & & 2r^2 & + & 12r & & & \\ & & 2r^2 & + & 2r & & & \\ \hline & & & & 10r & + & 10 & \\ & & & & 10r & + & 10 & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

så att

$$P(r) = (r+1)\left(r^2 + 2r + 10\right) = (r+1)\left((r+1)^2 + 9\right) = 0 \iff r = -1, \ -1 \pm 3i$$

vilket ger att

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}(C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x).$$

Vi delar upp partikulärlösningen så att $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där

$$P(D)y_{p_1} = 26\mathrm{e}^x \quad \text{och} \quad P(D)y_{p_2} = -10x - 2.$$

Detta fungerar eftersom linjäriteten ger att $P(D)(y_{p_1} + y_{p_2}) = P(D)y_{p_1} + P(D)y_{p_2}$.
Ansätt $y_{p_1} = A\mathrm{e}^x$. Då $y_{p_1} = y_{p_1}' = y_{p_1}'' = y_{p_1}''' = A\mathrm{e}^x$ ger insättning i ekvationen att

$$P(D)y_{p_1} = A\mathrm{e}^x(1 + 3 + 12 + 10) = 26A\mathrm{e}^x = 26\mathrm{e}^x \iff A = 1$$

så att $y_{p_1} = \mathrm{e}^x$.
Ansätt $y_{p_2} = Bx + C$. Då $y_{p_2}' = B$, $y_{p_2}'' = y_{p_2}''' = 0$ ger insättning att

$$\begin{aligned} & P(D)y_{p_2} = 12B + 10(Bx + C) = 10Bx + 12B + 10C = -10x - 2 \iff \\ & \iff \begin{cases} 10B = -10 \\ 12B + 10C = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -1 \\ C = (-2 - 12(-1))/10 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

så att $y_{p_2} = -x + 1$ och

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = \mathrm{e}^{-x}(C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x) + \mathrm{e}^x - x + 1.$$

Återstår nu att ta hand om begynnelsevillkoret $y'(0) = 0$. Derivering av lösningen ovan ger

$$\begin{aligned} & y'(x) = \mathrm{e}^{-x}(0 + 3C_2 \cos 3x - 3C_3 \sin 3x - (C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x)) + \mathrm{e}^x - 1, \\ & y'(0) = 3C_2 - C_1 - C_3 = 0 \iff C_1 = 3C_2 - C_3 \implies \\ \implies & y = \mathrm{e}^{-x}(3C_2 - C_3 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x) + \mathrm{e}^x - x + 1 = \\ & = \mathrm{e}^{-x}(C_2(3 + \sin 3x) + C_3(-1 + \cos 3x)) + \mathrm{e}^x - x + 1. \end{aligned}$$

4. Enligt Maclaurins formel gäller

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$$

för något ξ mellan 0 och x. För att få resttermen på Lagranges form så deriverar vi fram Maclaurinutvecklingen.

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) &=& \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) & f(0) &=& 1, \\ f'(x) &=& \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}) & f'(0) &=& 0, \\ f''(x) &=& \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) & f''(0) &=& 1,\ , \\ f'''(x) &=& \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}) & f'''(0) &=& 0, \\ f^{(4)}(x) &=& \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}), & & & \end{array}$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}}{2\cdot 4!}x^4=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}}{48}x^4.$$

Ur ovanstående fås att $1+\frac{1}{2}x^2$ är Maclaurinpolynomet av ordning 3 till f och om vi väljer $p(x)=1+\frac{1}{2}x^2$ följer det att

$$|f(x)-p(x)|=\left|1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}}{48}x^4-\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\right|=\frac{\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}}{48}|x|^4$$

för något ξ mellan 0 och x. Det som återstår för att nå den önskade uppskattningen är att visa att för varje x med $|x|\le 1$ och ξ mellan 0 och x så är $\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}\le 4$.
Antag för enkelhets skull att $0\le x\le 1$. Då $0\le\xi\le x\le 1$ följer det att

$$0\le \mathrm{e}^\xi\le \mathrm{e}^1\le 3,\quad 0\le \mathrm{e}^{-\xi}\le \mathrm{e}^0=1 \Longrightarrow \mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}\le 3+1\le 4$$

Om istället $-1\le x\le 0$ så att $-1\le x\le\xi\le 0$ blir rollerna omkastade och

$$0\le \mathrm{e}^\xi\le \mathrm{e}^0\le 1,\quad 0\le \mathrm{e}^{-\xi}\le \mathrm{e}^1=3 \Longrightarrow \mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}\le 1+3\le 4$$

så att

$$\left|f(x)-\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)\right|=\frac{\mathrm{e}^\xi+\mathrm{e}^{-\xi}}{48}|x|^4\le\frac{4}{48}|x|^4=\frac{1}{12}|x|^4. \qquad \text{VSB.}$$

5. Vi börjar med att beräkna det inbyggda begynnelsevärdet för lösningen till integralekvationen. Då integralens undre gräns är 1 ser vi att integralen är 0 för $x=1$ oavsett vilken (integrerbar) funktion vi sätter in. Detta ger

$$y(1)=\frac{1}{2}+\int_1^1\frac{y(t)^2}{t}\,dt=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

Derivering av ekvationen ger enligt analysens huvudsats att vi får ekvationen

$$y'(x)=\frac{y(x)^2}{x},\quad y(1)=\frac{1}{2},\quad x\neq 0$$

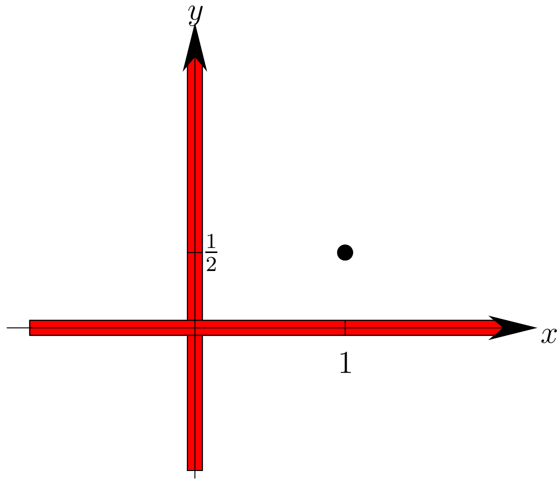
vilket skall visa sig vara en separabel ekvation av ordning 1. För $x,y\neq 0$ ger division med y^2 att

$$\frac{y'}{y^2}=\frac{1}{x}, \iff \int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$-\frac{1}{y(1)}=-\frac{1}{1/2}=-2=\ln|1|+C=C \iff \frac{1}{y}=2-\ln|x| \iff$$

$$\iff y=\frac{1}{2-\ln|x|},\quad 2-\ln|x|\neq 0.$$

Återstår att reda ut vad den sökta lösningens definitionsmängd blir. Vi ritar i en figur in villkoren $x, y \neq 0$, som är nödvändiga för att ovanstående kalkyl ska vara giltig, och villkoret på lösningen, $y(1) = \frac{1}{2}$ i en figur.



De röda blocken markerar gränser som inte kan passeras utan att bryta mot villkoren. Notera också att med $y = 1/(2 - \ln|x|)$ så är $y \neq 0$ för alla $x \neq 0$. Då lösningen skall vara definierad för $x = 1$ följer det ur detta att $x > 0$ som ihop med villkoret som uppkom då vi löste ut y ger att

$$2 - \ln|x| = 2 - \ln x \neq 0 \iff \ln x \neq 2 \iff x \neq \mathrm{e}^2.$$

Detta innebär att definitionsmängden är ett intervall sådant att

$$x > 0, \quad x = 1 \text{ ingår i intervallet}, \quad x = \mathrm{e}^2 \text{ ingår inte i intervallet}.$$

Då $\mathrm{e}^2 > 1$ blir definitionsmängden $0 < x < \mathrm{e}^2$ eftersom den enligt vår definition av lösning till en ODE måste vara ETT intervall. Lösningen till ekvationen blir därmed

$$y = \frac{1}{2 - \ln x}, \quad 0 < x < \mathrm{e}^2.$$

6. För att enklare kunna använda Maclaurinutveckling byter vi variabel och sätter $t = \frac{1}{x}$ så att $t \to 0^+$ då $x \to \infty$. Vi får

$$x^2\left(\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt{x^2 + bx - 1}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3} + \frac{a}{t^2}} - \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{b}{t} - 1}\right) =$$
$$= \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}\sqrt[3]{1 + at} - \frac{1}{t}\sqrt{1 + bt - t^2}\right) = \frac{1}{t^3}\left(\sqrt[3]{1 + at} - \sqrt{1 + bt - t^2}\right).$$

P.g.a. faktorn $\frac{1}{t^3}$ inses att det räcker med utveckling till ordning 3 med resterm av grad 4.

$$\sqrt[3]{1 + at} = 1 + \binom{1/3}{1}at + \binom{1/3}{2}(at)^2 + \binom{1/3}{3}(at)^3 + \mathcal{O}(t^4) =$$
$$= \left[\ \binom{1/3}{1} = \tfrac{1}{3},\ \binom{1/3}{2} = \tfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} = -\tfrac{1}{9},\ \binom{1/3}{3} = \tfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} = -\tfrac{1}{9}\left(-\tfrac{5}{9}\right) = \tfrac{5}{81}\ \right] =$$
$$= 1 + \frac{a}{3}t - \frac{a^2}{9}t^2 + \frac{5a^3}{81}t^3 + \mathcal{O}(t^4).$$

Då utvecklingen av nästa term blir likartad men lite mer komplicerad tänker vi $s = bt - t^2$ och tittar på delarna separat.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+bt-t^2} &= \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{16}s^3 + \mathcal{O}\big(s^4\big) = \\
= \Bigg[&\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8},\ \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}, \\
&s^2 = (bt-t^2)^2 = b^2t^2 - 2bt^3 + t^4 = b^2t^2 - 2bt^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\,, \\
&s^3 = (bt-t^2)\left(b^2t^2 - 2bt^3 + t^4\right) = b^3t^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\Bigg] = \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(bt - t^2\right) - \frac{1}{8}\left(b^2t^2 - 2bt^3\right) + \frac{1}{16}b^3t^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big) = \\
&= 1 + \frac{b}{2}t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{b^2}{8}t^2 + \frac{b}{4}t^3 + \frac{b^3}{16}t^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big) = \\
&= 1 + \frac{b}{2}t - \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{8}\right)t^2 + \left(\frac{b}{4} + \frac{b^3}{16}\right)t^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big)\,.
\end{aligned}
$$

Sammantaget fås då

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+at} - \sqrt{1+bt-t^2} &= 1 + \frac{a}{3}t - \frac{a^2}{9}t^2 + \frac{5a^3}{81}t^3 - \\
&- \left(1 + \frac{b}{2}t - \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{8}\right)t^2 + \left(\frac{b}{4} + \frac{b^3}{16}\right)t^3\right) + \mathcal{O}\big(t^4\big) = \\
&= \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)t + \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8}\right)t^2 + \left(\frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16}\right)t^3 + \mathcal{O}\big(t^4\big)
\end{aligned}
$$

så att

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{1+at} - \sqrt{1+bt-t^2}}{t^3} = \frac{\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)t + \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8}\right)t^2 + \left(\frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16}\right)t^3 + \mathcal{O}(t^4)}{t^3} = \\
&= \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{t^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8}\right)\frac{1}{t} + \left(\frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16}\right) + \mathcal{O}(t)\,.
\end{aligned}
$$

Om vi ur ovanstående skall kunna få ett ändligt gränsvärde då $t \to 0^+$ måste $\frac{1}{t}$- och $\frac{1}{t^2}$-termerna försvinna. Det ger att $\dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{2} = 0 \iff a = \dfrac{3b}{2}$ som insatt i koefficienten för $\frac{1}{t}$-termen ger

$$
\frac{1}{2} - \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{9b^2}{4\cdot 9} + \frac{b^2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{b^2}{8} = 0 \iff b^2 = 4 \iff b = \pm 2
$$

vilket i sin tur ger $a = 3$ då $b = 2$ och $a = -2$ då $b = -3$. Slutligen, med dessa värden på a, b blir gränsvärdet

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{a = 3, b = 2}}: &\quad \frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16} = \frac{5\cdot 27}{81} - \frac{2}{4} - \frac{8}{16} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, \\
\underline{\underline{a = -3, b = -2}}: &\quad \frac{5a^3}{81} - \frac{b}{4} - \frac{b^3}{16} = -\frac{5\cdot 27}{81} + \frac{2}{4} + \frac{8}{16} = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

7. Vi börjar med att skriva om seriens termer med hjälp av partialbråksuppdelning.

$$a_n = \frac{1}{2n^2+n} = \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

och sedan studera seriens delsummor

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N+1}\right) =$$
$$= 2\sum_{k=2}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Från teorin om potens- och Maclaurinserier vet vi att Maclaurinserien för $\ln(1+x)$ är

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

och att denna är konvergent för $-1 < x \leq 1$, d.v.s.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(1+1) = \ln 2 \tag{1}$$

Detta ger att vår serie blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = 2\lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k} = 2\lim_{N\to\infty}\left(1 - 1 + \sum_{k=2}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k}\right) =$$
$$= 2\lim_{N\to\infty}\left(1 - \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = 2\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \overset{(1)}{=} 2(1 - \ln 2).$$

.