SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2022-10-19 KL. 14–19

1. Eftersom $\frac{d}{dx}\ln(1+x^4) = \frac{4x^3}{1+x^4}$ så är $e^{\ln(1+x^4)} = 1+x^4$ en integrerande faktor till ekvationen. Vi får:

$$(1+x^4)\cdot\left(y' + \frac{4x^3}{1+x^4}y\right) = (1+x^4)y' + 4x^3y = ((1+x^4)y)' = (1+x^4)\cdot 5,$$

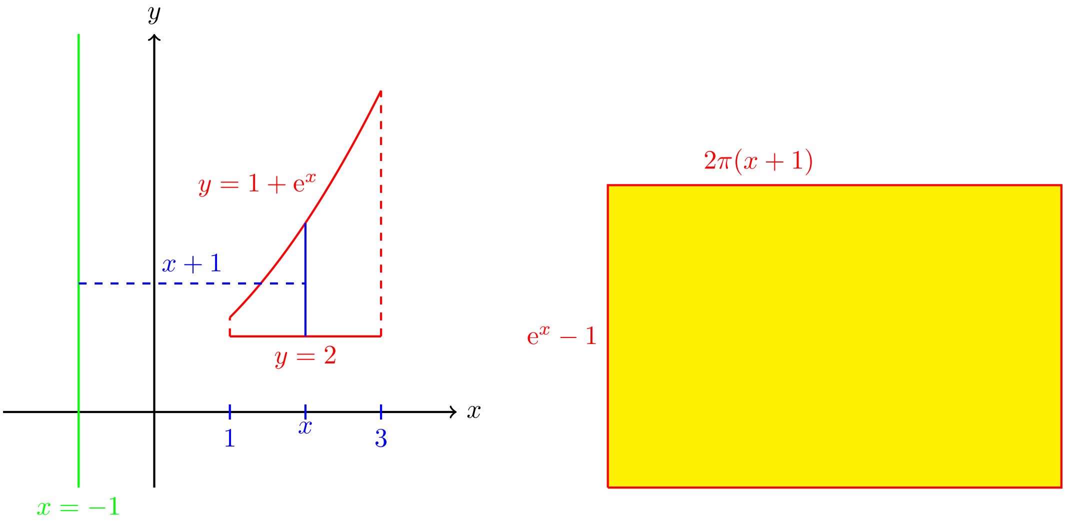
vilket efter integration ger

$$(1+x^4)y = x^5 + 5x + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 2$ ger att $(1+0^4)y(0) = y(0) = 0^5 + 5\cdot 0 + C = 2$, dvs. $C = 2$.

Svar: $y = \dfrac{x^5+5x+2}{1+x^4}$.

2 (a).



När den blå stolpen vid x, som har höjd $(1+e^x) - 2 = e^x - 1$, roteras kring $x = -1$ uppstår en cylinder med omkrets $2\pi(x+1)$ (avståndet mellan x och linjen är $x+1$) och höjd $e^x - 1$, som har area $2\pi\cdot(x+1)\cdot(e^x-1) = 2\pi(xe^x + e^x - x - 1)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 1 till 3:

$$\int_1^3 2\pi(xe^x + e^x - x - 1)\,dx.$$

Svar: $\displaystyle\int_1^3 2\pi(xe^x + e^x - x - 1)\,dx$.

2 (b.) Eftersom $x'(t) = 2t$ och $y'(t) = t^2$ ges kurvlängden av

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^4}\,dt \\
&= /\text{OBS! } t \geq 0/ = \int_0^1 \sqrt{4+t^2}\cdot t dt \\
&= \left/ \begin{array}{l} s = t^2, \\ ds = 2tdt, \\ 0^2 = 0, 1^2 = 1 \end{array} \right/ = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+s}\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+s)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-8}{3}.
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{5\sqrt{5}-8}{3}$.

3 (a). Då vi har x^2 i nämnaren så räcker det med utveckling till grad 2 och resterm $\mathcal{O}(x^3)$. Eftersom $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3)$ och $\arctan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ får vi med $t = 2x$ att

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2x} - \arctan(x) - 1}{x^2} &= \frac{\left(1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \mathcal{O}((2x)^3)\right) - \left(x + \mathcal{O}(x^3)\right) - 1}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}{1} \to -\frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.\end{aligned}$$

Svar: $-1/2$.

3 (b). Eftersom $\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$, $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ och $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ får vi med $t = 2x^2$ att

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{2x^2} - 1}{\ln(1+x) - \sin x} &= \frac{(1 + 2x^2 + \mathcal{O}((2x^2)^2) - 1}{(x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)) - (x + \mathcal{O}(x^3))} \\ &= \frac{2x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{-x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{2 + \mathcal{O}(x^2)}{-1/2 + \mathcal{O}(x)} \to \frac{2}{-1/2} = -4 \text{ då } t \to 0.\end{aligned}$$

Svar: -4.

3 (c). Eftersom $\sin(t) = t + \mathcal{O}(t^3)$ och $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$ får vi med $t = x^2$ att

$$\sin(x^2) + 2\cos(x) = \left(x^2 + \mathcal{O}((x^2)^3)\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) = 2 + \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6) = 2 + x^4\left(\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2)\right),$$

och uttrycket inom parentesen i det sista uttrycket är strängt positivt för x nära 0 samt $x^4 > 0$ för $x \neq 0$ så har vi $f(x) > f(0) = 2$ för alla $x \neq 0$ nära noll. Det vill säga $f(x)$ har ett lokalt (strängt) minimum i $x = 0$.

Svar: Lokalt minimum i $x = 0$.

4 (a).

$$\sqrt[k]{\left|\frac{2^k x^k}{k + \sqrt{k}}\right|} = \frac{2|x|}{\sqrt[k]{k + \sqrt{k}}} \to 2|x| \text{ då } k \to \infty.$$

Detta ger konvergens då $2|x| < 1$, dvs. $|x| < 1/2$, och divergens då $|x| > 1/2$ enligt rotkriteriet.

I ändpunkten $x = 1/2$ får vi den positiva serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k}{k + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Eftersom den sista serien är divergent följer det av jämförelseprincipen att potensserien divergerar för $x = 1/2$.

I ändpunkten $x = -1/2$ får vi serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \left(\frac{-1}{2}\right)^k}{k + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \sqrt{k}}.$$

Detta är en alternerande serie där termernas absolutbelopp $1/(k + \sqrt{k})$ **avtar** mot noll, så serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: $-1/2 \leq x < 1/2$.

4 (b). Vi ser att integranden är positiv, samt att integralen $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2\sqrt{x}}\, dx$ endast är generaliserad i $x = 0$.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1 - (1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{\sqrt{x}}.$$

Vi jämför med $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ som är konvergent (eftersom $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ där den första integralen i högerledet är en av våra jämförelseintegraler som vi vet är konvergent och den andra inte är generaliserad och därmed konvergent).

$$\frac{\frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1/2 + \mathcal{O}(x^2) \to 1/2 \text{ då } x \to 0^+ \quad (0 < 1/2 < \infty),$$

så integralen $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent enligt jämförelseprincipen på gränsvärdesform.

Svar: Konvergent.

5.

$$p(D)y = y^{(4)} - 6y''' + 13y'' = 78x - 10 + 36\cos(2x) + 48\sin(2x)$$

har karaktäristiskt polynom

$$p(r) = r^4 - 6r^3 + 13r^2 = r^2(r^2 - 6r + 13) = r^2((r-3)^2 + 4) = r^2(r - (3+2i))(r - (3-2i)).$$

Alltså har vi

$$y_h = C_1 + C_2x + \mathrm{e}^{3x}(C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x)).$$

För att hitta en partikulärlösning y_p låter vi $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ (vilket fungerar då ekvationen är linjär) sådana att

$$p(D)y_{p_1} = 78x - 10 \text{ och } p(D)y_{p_2} = 36\cos(2x) + 48\sin(2x).$$

Vi ansätter $y_{p_1} = ax^3 + bx^2$ (då vi har en dubbelrot i 0):

$$y'_{p_1} = 3ax^2 + 2bx, \quad y''_{p_1} = 6ax + 2b, \quad y'''_{p_1} = 6a, \quad y^{(4)}_{p_1} = 0.$$

Insatt i ekvationen får vi då

$$0 - 6(6a) + 13(6ax + 2b) = 78x - 10,$$

vilket ger $a = b = 1$, så $y_{p_1} = x^3 + x^2$.

Vi ansätter $y_{p_2} = a\cos(2x) + b\sin(2x)$:

$$y'_{p_2} = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x), \quad y''_{p_2} = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$
$$y'''_{p_2} = 8a\sin(2x) - 8b\cos(2x), \quad y^{(4)}_{p_2} = 16a\cos(2x) + 16b\sin(2x).$$

Insatt i ekvationen får vi då

$$\begin{aligned}&16a\cos(2x) + 16b\sin(2x) - 6(8a\sin(2x) - 8b\cos(2x)) + 13(-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x))\\ &= (-36a + 48b)\cos(2x) + (-36b - 48a)\sin(2x) = 36\cos(2x) + 48\sin(2x),\end{aligned}$$

vilket ger $a = -1$ och $b = 0$, så $y_{p_2} = -\cos(2x)$.

Alltså ges lösningarna av

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 + C_2x + \mathrm{e}^{3x}(C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x)) + x^3 + x^2 - \cos(2x).$$

Svar: $y = C_1 + C_2x + \mathrm{e}^{3x}(C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x)) + x^3 + x^2 - \cos(2x)$.

6 (a).

$$f(x) = \sqrt[3]{1+3x} = (1+3x)^{1/3}.$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{ för något } \xi \text{ mellan 0 och } x.$$

$f(0) = 1$; $f'(x) = (1+3x)^{-2/3}$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = -2(1+3x)^{-5/3}$, $f''(0) = -2$; $f'''(x) = 10(1+3x)^{-8/3}$ ger nu

$$f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{5x^3}{3(1+3\xi)^{8/3}} \text{ för något } \xi \text{ mellan 0 och } x.$$

Svar: $f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{5x^3}{3(1+3\xi)^{8/3}}$ för något ξ mellan 0 och x.

6 (b). Med $x = -1/10$ i formeln ovan får vi

$$f(-1/10) = 1 - 1/10 - (1/10)^2 + \frac{5(-1/10)^3}{3(1+3\xi)^{8/3}} = \frac{89}{100} - \frac{5}{3000(1+3\xi)^{8/3}} \text{ för något } \xi,\ -1/10 \le \xi \le 0.$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}\left|f(-1/10) - \frac{89}{100}\right| &= \left|-\frac{5}{3000(1+3\xi)^{8/3}}\right| = \frac{5}{3000(1+3\xi)^{8/3}}\\ &\le \frac{5}{3000(1-3/10)^{8/3}} = \frac{5}{3000}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^{8/3} \le \frac{5}{3000}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^{9/3} = \frac{5}{3\cdot 7^3} = \frac{5}{1029} < \frac{1}{100},\end{aligned}$$

där vi använde att $(1+3\xi)^{8/3}$ blir som minst då $\xi = -1/10$ på intervallet $[-1/10, 0]$.

Svar: 89/100.

7. Vi börjar med att notera att eftersom $\mathrm{e} < 3$ får vi $\ln 3 > 1$, och $\ln(\ln(3)) > \ln 1 = 0$.

Vi noterar att om vi låter $f(t) = 1/(t(\ln t)(\ln(\ln(t))^p)$ så är funktionen positiv och avtagande på $[3, \infty]$ för $p \geq 0$.

Vi har nu

$$\int_3^\infty \frac{1}{t(\ln t)(\ln(\ln t))^p}\,dt = \Big/ u = \ln(\ln t), du = \frac{dt}{t \ln t} \Big/ = \int_{\ln(\ln 3)}^\infty \frac{1}{u^p} du.$$

Den senare vet vi är konvergent om och endast om $p > 1$, så enligt integralkriterier får vi alltså att summan

$$\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k(\ln k)(\ln \ln(k))^p}$$

är konvergent om $p > 1$ och divergent om $0 \leq p < 1$. Men då vi dessutom har att $p < q$ så gäller att

$$\frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^p} \geq \frac{1}{k(\ln k)(\ln(\ln k))^q},$$

vilket ger divergens även för $p < 0$.

(Notera att det inte är sant att $f(t)$ är avtagande på $[3, \infty)$ för alla p, t ex för $p = -1$ blir $f'(3)$ positivt.)