SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2023-08-24 KL. 8–13

1 (a). Eftersom

$$\arctan t = t + \mathcal{O}(t^3) \Rightarrow \arctan(x^2) = x^2 + \mathcal{O}(x^6),$$
$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathcal{O}(t^3) \Rightarrow \sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$$

får vi

$$\frac{1+\arctan(x^2)-\sqrt{1+2x^2}}{x^4} = \frac{1+(x^2+\mathcal{O}(x^6))-(1+x^2-x^4/2+\mathcal{O}(x^6))}{x^4} = \frac{x^4/2+\mathcal{O}(x^6)}{x^4}$$
$$= \frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2) \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $1/2$.

1 (b). Maclaurinutveckling av ordning 2 med Lagranges restterm ges av

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Med $f(x) = \sin(x)$ får vi $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$ och $f'''(x) = -\cos x$. Alltså gäller

$$f(x) = \sin(x) = x + \frac{-\cos\xi}{6}x^3 \text{ för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Med $x = 1/10$ får vi alltså för något $\xi \in [0, 1/10]$

$$|\sin(1/10) - 1/10| = \left|\frac{-\cos\xi}{6}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\right| = \frac{|\cos\xi|}{6000} \le \frac{1}{6000},$$

eftersom $|\cos\xi| \le 1$ gäller för alla $\xi \in \mathbb{R}$.

Svar: $\sin(x) = x - \frac{\cos\xi}{6}x^3$ för något ξ mellan 0 och x.

2 (a). Ekvationen är linjär, och eftersom $(\ln(2+\cos x))' = -\sin(x)/(2+\cos x)$ är

$$\mathrm{e}^{\ln(2+\cos x)} = 2 + \cos x$$

en integrerande faktor. Vi får

$$((2+\cos x)y)' = (2+\cos x)\left(y' - \frac{\sin x}{2+\cos x}y\right) = (2+\cos x)x.$$

Eftersom

$$\int (2+\cos x)x\,dx = \int (2x + x\cos x)\,dx = x^2 + x\sin x + \cos x + C,$$

(vilket t ex. kan fås genom partiell integration av $\int x\cos x\,dx$) så får vi

$$y = \frac{x^2 + x\sin x + \cos x + C}{2+\cos x}.$$

(Lösningens definitionsmängd är hela $\mathbb{R}$.)

Svar: $y = \dfrac{x^2 + x\sin x + \cos x + C}{2+\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

2 (b). $r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 3$ eller $r = -2$, så

$$y_h = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$ ger $y_p' = 2ax + b$ och $y_p'' = 2a$. Så

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = 2a - (2ax+b) - 6(ax^2+bx+c) = -6ax^2 - (2a+6b)x + (2a-b-6c) = 6x^2 + 2x - 2.$$

Alltså $-6a = 6$, $-2a - 6b = 2$ och $2a - b - 6c = -2$ som har lösningen $a = -1$ och $b = c = 0$.

Så $y = y_h + y_p = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x} - x^2$.

Svar: $y = y_h + y_p = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x} - x^2$.

2 (c). Eftersom
$$\frac{d}{dx}\left(y(x)+\int_0^x y(t)\,dt\right)=y'(x)+y(x)=\frac{d}{dx}2=0,$$
samt $x=0$ ger
$$y(0)+\int_0^0 y(t)\,dt=y(0)=2,$$
ser vi att integralekvationen är ekvivalent med differentialekvationen $y'+y=0$ med bivillkoret $y(0)=2$.
$$(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x(y'+y)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x y=C\Leftrightarrow y=C\mathrm{e}^{-x}.$$
(Alternativt, då ekvationen är en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter: karaktäristisk ekvation $r+1=0\Leftrightarrow r=-1$ ger allmän lösning $y=C\mathrm{e}^{-x}$.)
$$y(0)=C\mathrm{e}^0=C=2.$$
Så
$$y=2\mathrm{e}^{-x}.$$
(Lösningens definitionsmängd är hela $\mathbb{R}$.)

Svar: $y=2\mathrm{e}^{-x},\quad x\in\mathbb{R}$.

3 (a). Integralen är endast generaliserad i ∞, och integranden är positiv. Eftersom $\ln(1+t)=t+\mathcal{O}(t^2)$ får vi
$$\frac{\ln(1+1/x)}{x}=\frac{1/x+\mathcal{O}(1/x^2)}{x}=\frac{1}{x^2}+\mathcal{O}(1/x^3).$$
Vi jämför med
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$
som vi vet är konvergent.
$$\frac{\ln(1+1/x)}{x}\bigg/\frac{1}{x^2}=\frac{1/x^2+\mathcal{O}(1/x^3)}{1/x^2}=1+\mathcal{O}(1/x)\to 1 \text{ då } x\to\infty \quad (0<1<\infty).$$
Alltså följer det från jämförelseprincipen på gränsvärdesform att även
$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+1/x)}{x}\,dx$$
är konvergent.

Svar: Konvergent.

3 (b). Serien alternerar, och eftersom $\arctan x$ **växer** mot $\pi/2$ då $x\to\infty$ ser vi att termernas belopp
$$|(-1)^k(\pi/2-\arctan k)|=(\pi/2-\arctan k)$$
avtar och går mot 0 då $k\to\infty$. Alltså är alla kriterier i Leibniz kriterium uppfyllda, och serien är konvergent.

Svar: Konvergent.

3 (c). Vi använder kvotkriteriet
$$\left|\frac{(k+1)^2 3^{k+1}x^{2(k+1)}}{k^2 3^k x^{2k}}\right|=\frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot 3\cdot|x|^2=\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\cdot 3\cdot|x|^2\to 3|x|^2 \text{ då } k\to\infty.$$
Eftersom $3|x|^2<1\Leftrightarrow |x|<1/\sqrt{3}$ är konvergensradien $R=1/\sqrt{3}$.

Svar: $R=1/\sqrt{3}$.

4 (a). Eftersom

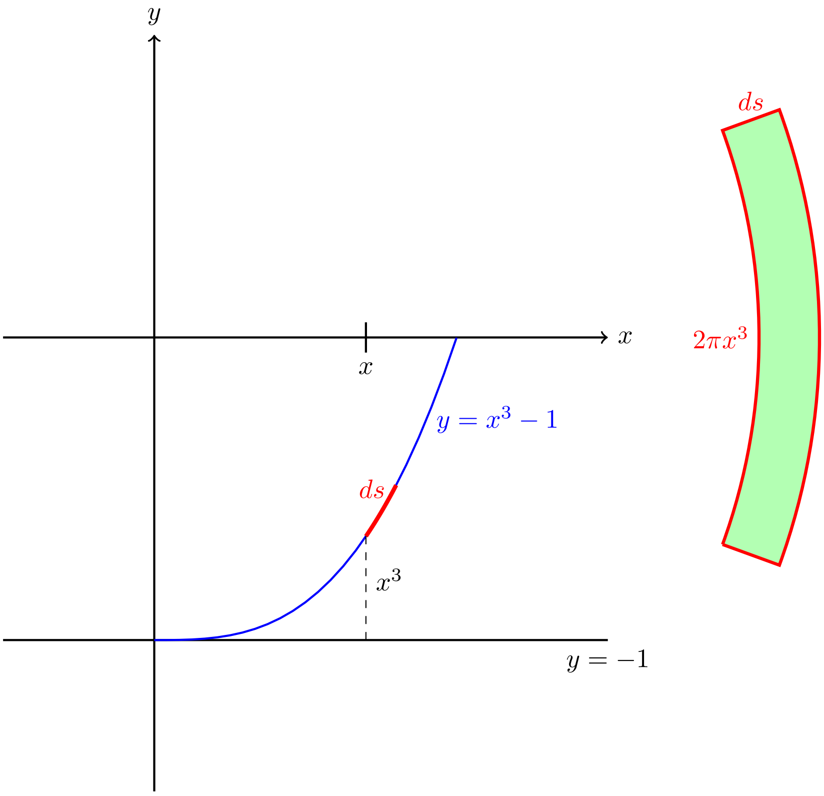
$$x'(t) = te^t \text{ och } y'(t) = 2t$$

får vi att längden ges av

$$\int_1^3 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{t^2 e^{2t} + 4t^2}\, dt = / \text{ eftersom } t > 0 / = \int_1^3 t\sqrt{e^{2t} + 4}\, dt.$$

Svar: $\int_1^3 \sqrt{t^2 e^{2t} + 4t^2}\, dt \quad \left(= \int_1^3 t\sqrt{e^{2t} + 4}\, dt\right).$

4 (b).



Eftersom $y(x) = x^3 - 1$ gäller $y'(x) = 3x^2$ så att $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = \sqrt{1 + 9x^4}dx$. Avståndet från ds-elementet vid x till rotationsaxeln $y = -1$ är x^3, så när ds elementet roterar kring $y = -1$ uppstår ett band med area $2\pi x^3\, ds = 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$. Alltså ges rotationsarean av

$$\int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx = /t = x^4, dt/4 = x^3 dx/ = \int_0^1 2\pi\sqrt{1 + 9t}\frac{1}{4}\, dt = \frac{\pi}{2}\left[\frac{2(1 + 9t)^{3/2}}{3 \cdot 9}\right]_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Svar: $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1).$

5. Eftersom $|\sin(t)| \le t$ och $|\sin t| \le 1$ gäller för alla $t > 0$ får vi

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx = \int_0^1 \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx + \int_1^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1/x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^t = 2 + 2 = 4.$$

Detta visar att integralen är absolutkonvergent och därmed även konvergent. Detta ger även att

$$\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx \le \left|\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx\right| \le \int_0^\infty \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx \le 4.$$

För att visa den nedre olikheten noterar vi att $\sin(1/x) \ge 0$ för (bland annat) $x \ge 1$ och $\sin(1/x) \ge -1$ gäller för alla x, alltså gäller

$$\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx}_{\ge 0} \ge \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx \ge -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = -2.$$

6. Med $y(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ får vi när $|x| < R$, där R är potensseriens konvergensradie,

$$\begin{aligned} xy(x) - 3\int_0^x y(t)\,dt &= \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^\infty \int_0^x c_n t^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+1} - 3\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{n-2}{n+1} c_n x^{n+1}. \end{aligned}$$

Vidare noterar vi att

$$\frac{x}{1-x} - x^3 = x \cdot \frac{1}{1-x} - x^3 = x\sum_{n=0}^\infty x^n - x^3 = \sum_{n=0}^\infty x^{n+1} - x^3 \text{ då } |x| < 1.$$

Alltså får vi ekvationen

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n-2}{n+1} c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^\infty x^{n+1} - x^3 \text{ då } |x| < \min(R, 1).$$

Så för $n \ne 2$ måste $(n-2)c_n/(n+1) = 1$, dvs. $c_n = (n+1)/(n-2)$ för $n \ne 2$. För $n = 2$ ger ovanstående ekvation ingen information (OBS! både termerna i VL och HL blir 0 för $n = 2$), men eftersom bivillkoret $y''(0) = 2$ var givet gäller, enligt Maclaurins formel, $c_2 = y''(0)/2! = 2/2 = 1$.

För att visa att konvergensradien är 1 kan vi använda rotkriteriet. För $n \ne 2$ gäller

$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-2}}|x| \to |x| \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså är konvergensradien 1, och därmed är beräkningarna ovan giltiga för $|x| < 1$.

Svar: $c_n = (n+1)/(n-2)$ för $n \ne 2$ och $c_2 = 1$.