Lösningsförslag envariabelanalys 2 2024-01-03

1. (a) Vi behöver standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad \text{och} \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

och med hjälp av dessa utvecklingar finner vi att

$$\frac{x - \sin x}{x - \arctan x} = \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{3} + O(x^5)} = \frac{1/6 + O(x^2)}{1/3 + O(x^2)} \to \frac{1}{2}, \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Eftersom

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4) \quad \text{och} \quad \ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + O(s^4)$$

så blir, med $t = 2x$ och $s = -x$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + O((2x)^4) \\ &\quad + 2\left(-x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + O((-x)^4)\right) - x^2 \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} - 2x - x^2 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + O(x^4) \\ &= 1 + \frac{2x^3}{3} + O(x^4) = 1 + x^3\left(\frac{2}{3} + O(x)\right). \end{aligned}$$

Därmed ser vi att för x nära 0 blir parentesen större än noll och då x^3 växlar tecken i $x = 0$ så kan vi inte ha en lokal extrempunkt i $x = 0$.

(c) Enligt standardutvecklingar är

$$\sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}s^2 + O(s^3) = 1 + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} + O(s^3)$$

och

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

så med $s = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$ finner vi att

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + O\left(O(x^2)^3\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + O(x^6). \end{aligned}$$

Svar: (a) $\frac{1}{2}$ (b) ingen lokal extrempunkt (c) $1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + O(x^6)$.

2. Ekvationen är linjär med konstanta koefficienter och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^3 + r^2 + 4r + 4 = (r^2 + 4)(r + 1) = (r + 2i)(r - 2i)(r + 1),$$

vilket vi ser genom att gissa roten $r = -1$ följt av polynomdivision. Således ges (enligt känd sats) lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Vi söker en partikulärlösning så att

$$p(D)y_{p_1} = xe^{-x}.$$

Vi ansätter $y_{p_1} = z(x)e^{-x}$. Genom direkt derivering finner vi att

$$y'_{p_1} = (z' - z)e^{-x}, \quad y''_{p_1} = (z'' - 2z' + z)e^{-x} \quad y'''_{p_1} = (z''' - 3z'' + 3z' - z)e^{-x}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} p(D)(ze^x) &= (z''' - 3z'' + 3z' - z)e^{-x} + (z'' - 2z' + z)e^{-x} + 4(z' - z)e^{-x} + 4ze^{-x} \\ &= (z''' - 2z'' + 5z')e^{-x}, \end{aligned}$$

så

$$z''' - 2z'' + 5z' = x.$$

Vi söker en lösning till denna ekvation och ansätter $z = Ax^2 + Bx$, vilket leder till att $10A = 1$ och $-4A + 5B = 0$, så $A = \frac{1}{10}$ och $B = \frac{2}{25}$. Därmed är $z_p = \frac{x^2}{10} + \frac{2x}{25}$ och $y_{p_1} = \left(\frac{x^2}{10} + \frac{2x}{25}\right)e^{-x}$.

För att hitta en partikulärlösning till ekvationen $P(D)y_{p_2} = \cos x$ kan vi göra ansatsen $y_{p_2} = C\cos x + D\sin x$, så

$$y'_{p_2} = -C\sin x + D\cos x, \qquad y''_{p_2} = -C\cos x - D\sin x, \qquad y'''_{p_2} = C\sin x - D\cos x.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} &C\sin x - D\cos x - C\cos x - D\sin x - 4C\sin x + 4D\cos x + 4C\cos x + 4D\sin x = \cos x \\ &\quad \Leftrightarrow \quad C - D - 4C + 4D = 0 \text{ och } -D - C + 4D + 4C = 1. \end{aligned}$$

Alltså måste $C = D$ och $3C + 3D = 1$, så $C = D = \frac{1}{6}$.

Vi har därmed funnit den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \left(\frac{x^2}{10} + \frac{2x}{25}\right)e^{-x} + \frac{1}{6}(\cos x + \sin x).$$

Svar: $y = \left(\frac{x^2}{10} + \frac{2x}{25} + C_1\right)e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{6}(\cos x + \sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.

3. (a) Enligt känd logaritmlag så gäller att

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Vi finner då att

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

där

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to 1, \quad \text{då } x \to \infty$$

enligt känt standardgränsvärde (använd annars en Maclaurinutveckling). Eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

är känt konvergent ($\alpha = 3/2 > 1$), $\dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{\sqrt{x}} > 0$ och $0 < 1 < \infty$ så följer det att integralen i frågan är konvergent enligt jämförelsesats.

(b) Vi noterar direkt att $\arctan(k) \to \dfrac{\pi}{2}$ då $k \to \infty$ och $\cos k\pi = (-1)^k$, så termerna i serien går ej mot 0 då $k \to \infty$. Alltså är serien divergent enligt divergenstestet.

(c) För $k \geq 1$ så gäller att

$$\frac{2^k}{2 \cdot 4^k} \leq \frac{2^k}{3^k + 4^k} \leq \frac{2^k}{2 \cdot 3^k}$$

vilket medför att

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k+4^k} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1-2/3} = 1$$

och

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k+4^k} \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{2 \cdot 4^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2}$$

enligt formel för geometrisk serie.
Alternativt: eftersom

$$\frac{2^k}{3^k+4^k} = \frac{2^k}{4^k} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1}$$

och för $k \geq 1$ så gäller

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{\frac{3}{4}+1} \leq \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1} \leq 1$$

så följer det att

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k+4^k} \geq \frac{4}{7}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{4}{7} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$$

och

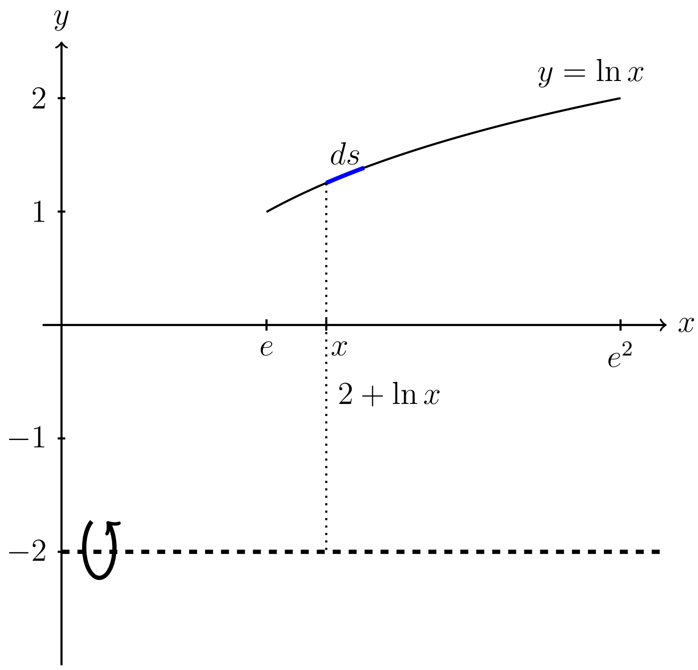
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k+4^k} \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Svar: (a) konvergent (b) divergent (c) se ovan.

4. (a) Bågelementet finner vi enligt

$$ds(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + (1/x)^2}\, dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx, \quad e \leq x \leq e^2,$$

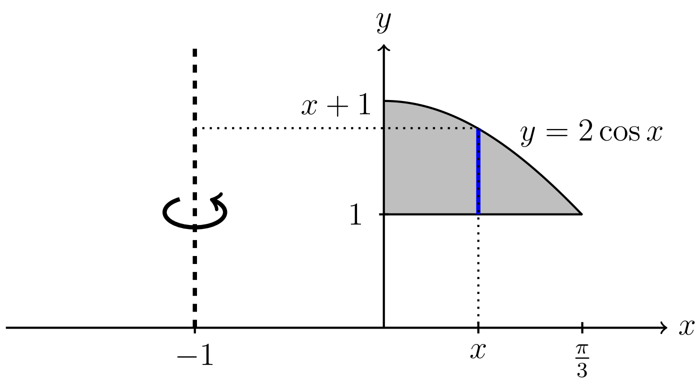
och rotation sker kring $y = -2$. Vi ritar en principskiss.



Rotationsarean som uppstår då kurvan roterar ett varv kring $y = -2$ kan beräknas enligt

$$A = 2\pi \int_e^{e^2} (2 + \ln x)\, ds(x) = 2\pi \int_e^{e^2} \frac{(2 + \ln x)\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx.$$

(b) Området $1 \leq y \leq 2\cos x$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$, roterar ett varv kring $x = -1$. Vi ritar en principskiss.



Vid rotation kring $x = -1$ så uppstår vid punkten x en cylinder som har radie $x + 1$ och höjd $2\cos x - 1$. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x) = 2\pi(x+1)(2\cos x - 1)\, dx, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

Vi summerar volymselementen och ser att

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/3} dV(x) = 2\pi \int_0^{\pi/3} (x+1)(2\cos x - 1)\, dx \\
&= 2\pi \left[(x+1)\left(2\sin x - x\right)\right]_0^{\pi/3} - 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(2\sin x - x\right)\, dx \\
&= 2\pi \left[(x+1)\left(2\sin x - x\right) + 2\cos x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/3} \\
&= 2\pi \left(\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) + 1 + \frac{\pi^2}{18} - 2\right) \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 - \frac{\pi^2}{18}\right).
\end{aligned}
$$

Svar: (a) $2\pi \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(2+\ln x)\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$ (b) $2\pi \left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} - 1 - \dfrac{\pi^2}{18}\right)$.

5. Sätt $f(x) = \ln(1+x)$. Direkt derivering ger

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3} \text{ och } f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4},$$

så

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 2 \text{ och } f^{(4)}(\xi) = -6(1+\xi)^{-4}.$$

Maclaurinutvecklingen av ordning 3 för $\ln(1+x)$ blir därför

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\ln(1+x)}_{\text{Exakt värde}} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \\
&= \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{\text{Approximation}} + \underbrace{\frac{-x^4}{4(1+\xi)^4}}_{\text{Approximationsfel}}
\end{aligned}
$$

för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x.

Antag att $|x| \leq 1/4$. Eftersom ξ ligger mellan 0 och x så gäller $-1/4 \leq \xi \leq 1/4$. Därmed blir $1+\xi \geq 3/4$ och $1/(1+\xi)^4 \leq 1/(3/4)^4$, så

$$
\begin{aligned}
\left|\ln(1+x) - (x - x^2/2 + x^3/3)\right| &= \left|\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}\right| = \frac{|x|^4}{4(1+\xi)^4} \\
&\leq \frac{|x|^4}{4(3/4)^4} = \frac{4^3|x|^4}{3^4} \leq \frac{1}{4\cdot 3^4} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300}.
\end{aligned}
$$

Svar: $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

6. För att ekvationen ska vara definierad måste $|x| < \pi/2$, så vi antar att detta är sant. Genom att låta $x = 0$ i ekvationen ser vi att $2y(0) = -8$, så $y(0) = -4$. Vi deriverar ekvationen och finner att

$$2y' + \frac{9\tan x}{1+y} = 0.$$

Eftersom ekvationen är separabel så gäller så länge $y \neq -1$ att

$$\begin{aligned} 2y' + \frac{9\tan x}{1+y} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(1+y)y' = -9\tan x \\ &\Leftrightarrow \quad \int (2+2y)\,dy = -9\int \tan x\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad 2y + y^2 = C + 9\ln|\cos x| \\ &\Leftrightarrow \quad (y+1)^2 = D + 9\ln|\cos x| \end{aligned}$$

där D är en godtycklig konstant. Villkoret $y(0) = -4$ medför att

$$(-3)^2 = D + 9\ln 1 = D \quad \Leftrightarrow \quad D = 9.$$

Vidare ser vi att $|\cos x| = \cos x$ då $|x| < \pi/2$. Vi kan även se att detta intervall är nödvändigt för differentialekvationen då villkoret finns i $x = 0$. Således gäller att

$$(y+1)^2 = 9\,(1 + \ln\cos x) \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{9\,(1+\ln\cos x)} = -1 \pm 3\sqrt{1+\ln\cos x}.$$

Då $y(0) = -4$ är $y = -1 - 3\sqrt{1+\ln\cos x}$ enda möjligheten. Det största öppna intervall (som innehåller $x = 0$) där detta uttryck är definierat ges när

$$1 + \ln\cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\cos x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \arccos e^{-1}$$

för att få ett intervall som innehåller $x = 0$. Här använde vi att $-\pi/2 < x < \pi/2$ tillsammans med faktumet att $0 < e^{-1} < 1$ i den sista ekvivalensen. Definitionsmängden blir därmed $]-\arccos e^{-1},\ \arccos e^{-1}[$.

Svar: $y = -1 - 3\sqrt{1+\ln\cos x}$, där $x \in]-\arccos e^{-1},\ \arccos e^{-1}[$.