

Tentamen i Envariabelanalys 2

2022-08-25 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

1. (a) Kurvan (2 p)

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x < 1,$$

roteras ett varv kring linjen $y = -2$. Beräkna arean av den då uppkomna rotationsytan. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln.

- (b) Kurvan Γ definieras av (1 p)

$$\Gamma: \begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin t \end{cases}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Ange en integral för längden av Γ . Integralen ska *inte* beräknas.

2. (a) Avgör konvergens: $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx$. (b) Avgör konvergens: $\sum_{k=1}^\infty k \sin \frac{1}{k}$.

(c) Visa att $\int_0^\infty \frac{1+x}{\sqrt{x+x^3}} dx \leq 6$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' + 3y'' + 12y' + 10y = 26e^x - 10x - 2$$

sådana att $y'(0) = 0$.

4. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (= \cosh x)$$

med restterm i Lagranges form (ordning 4). Bestäm sedan ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|x|^4}{12} \quad \text{då } |x| \leq 1.$$

VÄND!

5. Bestäm en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$y(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{(y(t))^2}{t} dt.$$

För full poäng ska också största öppna intervall där $y(x)$ löser problemet anges.

6. Bestäm alla värden på parametrarna a och b sådana att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt{x^2 + bx - 1})$$

existerar ändligt, och beräkna gränsvärdet för dessa värden.

7. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + n}.$$