

Tentamen i Envariabelanalys 2

2023-08-24 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \arctan(x^2) - \sqrt{1 + 2x^2}}{x^4}.$$

(1p)

(b) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $f(x) = \sin x$ av ordning 2 med restterm i Lagranges form (ordning 3), och visa sedan att

$$\left| \sin \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \right| \leq \frac{1}{6000}.$$

(2p)

2. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' - \frac{\sin x}{2 + \cos x} y = x.$$

(b) (**Endast svar på (b)**) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - y' - 6y = 6x^2 + 2x - 2.$$

(c) Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = 2.$$

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens: $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{x} dx$.

(b) Avgör konvergens: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\pi/2 - \arctan k)$.

(c) Bestäm konvergensraden R för $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 5^k x^{2k}$.

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av parameterkurvan

$$x(t) = (t-1)e^t, \quad y(t) = t^2 + 2, \quad 1 \leq t \leq 3.$$

(1p)

(b) Beräkna arean av den yta som uppstår när kurvan

$$y = x^3 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

roterar ett varv kring linjen $y = -1$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

(2p)

Del B

5. Visa att integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$ är absolutkonvergent, samt att

$$-2 \leq \int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx \leq 4.$$

6. Bestäm koefficienterna c_n sådana att $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uppfyller

$$xy(x) - 3 \int_0^x y(t) dt = \frac{x}{1-x} - x^3 \text{ för alla } |x| < 1$$

med bivillkoret

$$y''(0) = 2,$$

samt visa att den framtagna potensserien har konvergensradie 1.