

Tentamen i Envariabelanalys 2

2024-01-03 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \arctan x}.$$

- (b) Avgör om

$$f(x) = e^{2x} + 2 \ln(1 - x) - x^2$$

har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

- (c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$

med rest $\mathcal{O}(x^6)$.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x e^{-x} + \cos x.$$

3. (a) Avgör konvergens: $\int_1^\infty \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\sqrt{x}} dx.$

- (b) Avgör konvergens: $\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos k\pi}{\arctan k}.$

- (c) Visa att $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k + 4^k} \leq 1.$

Var god vänd!

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, arean som uppstår då kurvan

$$y = \ln x, \quad e \leq x \leq e^2,$$

roterar ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)

- (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad 1 \leq y \leq 2 \cos x,$$

roterar ett varv kring linjen $x = -1$. (2p)

Inkludera principskisser som motiverar formlerna som används i (a) och (b).

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+x) - p(x)| \leq \frac{1}{300}, \quad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

6. Bestäm en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$2y(x) + \int_0^x \frac{9 \tan t}{1 + y(t)} dt = -8.$$

Ange också största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.
