Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2024-03-18 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTRn godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{e}^{-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} - \cos x}.$$
(b) Avgör om
$$f(x) = 2 - x^2 \sin^2 x + \ln(1 + x^4)$$
har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.
(c) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till funktionen
$$f(x) = x^{3/2}$$
i $x = 1$ med Lagranges restterm (av ordning 3).

2. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' + 6y'' + 13y' = 0. \qquad (1p)$$
(b) Bestäm en lösning $y(x)$ till
$$2yy' = 3y^2 + 6, \quad y(0) = -2,$$
samt ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.
För full poäng på (b) ska du dessutom redovisa en kontroll – genom direkt beräkning/insättning – att din framtagna funktion $y(x)$ löser problemet. (2p)

Var god vänd!

3. (a) Bestäm alla reella x sådana att potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k(k+k^2)}$$

är konvergent. (2p)

(b) Visa att

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+e^x-1}} \leq \frac{5}{2}. \qquad (1p)$$

4. (a) Beräkna arean av området som i polär form ges av

$$0 \leq r \leq 2\sin v, \qquad 0 \leq v \leq \pi. \qquad (1p)$$

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, \quad e^{-x} \leq y \leq x+1,$$

roterar ett varv kring linjen $y = 2$. Inkludera en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Del B

5. Beräkna summan av serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{3^n}.$$

6. Låt L vara längden av kurvan $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 1/2$. Visa att

$$\left| L - \frac{161}{320} \right| \leq \frac{1}{10\,000}.$$
