Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2024-06-01 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTRn godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2) + 2\cos x - 2\,\mathrm{e}^{x^4}}{x^4}$. (1p)

   (b) Bestäm en rationell approximation av
   $$\ln\frac{9}{10}$$
   med hjälp av Maclaurinutvecklingen av
   $$\ln(1+t)$$
   av ordning två med Lagranges restterm (av ordning tre), samt visa att felets absolutbelopp, med denna approximation, blir mindre än 1/1000. (2p)

2. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen
   $$y''' - 3y' + 2y = 2 + \mathrm{e}^x.$$

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^3 - 2k^2}$.

   (b) Visa att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \le 3$.

   (c) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x + \mathrm{e}^x}\,dx$.

Var god vänd!

4. (a) Den del av kurvan

$$y = 4 - x^2$$

som ligger i första kvadranten ($x \geq 0$, $y \geq 0$) roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna arean av den uppkomna ytan. (2p)

(b) Det begränsade området i första kvadranten som avgränsas av koordinataxlarna och kurvan

$$y = 4 - x^2$$

roteras ett varv kring linjen $y = 5$. Teckna den uppkomna rotationsvolymen som en integral (som ej behöver beräknas). (1p)

I båda deluppgifterna krävs tydliga figurer som motiverar hur du fått fram dina integraler.

Del B

5. Ange en potensserie som löser differentialekvationen

$$y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

För full poäng på uppgiften skall du ange de fyra första nollskilda koefficienterna, rekursionsformeln för att beräkna nästkommande koefficienter, samt potensseriens konvergensradie.

6. Bestäm $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2} + \mathcal{O}\big(x^5\big)\,.$$
