

Tentamen i Envariabelanalys 2

2025-01-10 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTR n godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{2 - 2 \cos x}.$$

- (b) Avgör om

$$f(x) = 1 + e^{x^2} - \sqrt{1 + 2x^2}$$

har en lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

- (c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av funktionen

$$f(x) = \arctan(\sin x)$$

med restterm $\mathcal{O}(x^7)$.

2. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 0. \quad (1p)$$

- (b) Bestäm en lösning $y(x)$ till

$$4y^3 y' = 2(y^4 + 1)x, \quad y(0) = 1,$$

samt ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens: $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2\sqrt{x+x^4}} dx.$
- (b) Bestäm konvergensraden R till potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k^3 2^k}.$
(OBS! Ändpunkterna $x = \pm R$ ska alltså ej undersökas.)
- (c) Visa att $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{x^2+2x^3} dx \leq \frac{3}{4}.$
4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, arean som uppstår då kurvan

$$y = x^2 - 2, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

roterar ett varv kring linjen $x = 3.$ (1p)

- (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq \sqrt{x},$$

roterar ett varv kring linjen $y = -1.$ (2p)

Inkludera principskisser som motiverar formlerna som används i (a) och (b).

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\left| \sqrt{1-x^2} - p(x) \right| \leq \frac{1}{1000}, \quad |x| \leq \frac{1}{3}.$$

6. Lös

$$y'' - 3x^2 y' - 6xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

med hjälp av en potensserieansats. För full poäng ska även lösningen uttryckas som en ändlig kombination av elementära funktioner.