

Tentamen i Envariabelanalys 2

2025-03-21 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTR n godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg 3 erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 2, med restterm i Lagranges form (av ordning 3), till

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Visa sedan med hjälp av denna utveckling att

$$\left| \sqrt{\frac{4}{5}} - \frac{179}{200} \right| \leq \frac{1}{1000}. \quad (2p)$$

- (b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2 + 2 \ln(1 - x^2)}{e^{-2x^2} - \cos 2x}$. (1p)

2. (a) Bestäm $f(x)$ så att $y = (1 + x^2)/3$ är en lösning till differentialekvationen

$$y' + f(x)y = x$$

och ange därefter den lösning till ekvationen som uppfyller $y(0) = 0$. (2p)

- (b) Ange samtliga lösningar (endast svar på 2b, inga uträkningar) till differentialekvationen

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \quad (1p)$$

Var god vänd!

3. (a) Bestäm konvergensraden R för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k + k^2}$.

(OBS! Ändpunkterna $\pm R$ ska alltså ej undersökas.)

- (b) Avgör konvergens: $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan x}{\sin^2 x} dx$.

- (c) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{3}{2}$.

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan

$$\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = e^{2t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1p)$$

- (b) Området

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

roteras ett varv kring linjen $x = \pi/2$. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

För full poäng på (b) krävs en figur som förklarar varför din integral blir som den blir.

Del B

5. Bestäm en lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$\frac{y'}{x+1} = \frac{y^2 - 1}{2x}, \quad y(1) = 0,$$

samt ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

6. Bestäm rationella tal (alltså kvoter mellan heltal) $a_0, a_1, a_2, \dots$ sådana att

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

och bestäm sedan en rationell approximation till integralen med ett fel vars absolutbelopp är högst $1/1000$. Approximationen får skrivas som en oförenklad summa av rationella tal.