Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATB08
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys del 2

20XX-XX-XX, XX:00–XX:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3p vardera.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3p vardera.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall krav K1, K2 och K3 vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, eller (men bara för betyg 3) motsvarande KTR godkänd,

K2: minst två godkända uppgifter på del A (där KTR inte kan hjälpa till),

K3: minst 3/4/5 godkända uppgifter samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan. För godkänt, upp till 8p, ger varje godkänd KTR 1 poäng.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Standardutvecklingar:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6), \qquad \cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8),$$

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9), \qquad \arctan x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tbinom{\alpha}{2}x^2 + \tbinom{\alpha}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4), \qquad \ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^6),$$

Ovan är α en **konstant** och $\binom{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}, \quad \binom{\alpha}{3} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \ldots$

Del A

På uppgift 1 krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}$.

   (b) Skriv upp den allmänna formeln för Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till en funktion $f(x)$, samt bestäm speciellt (antingen via formeln eller från kända utvecklingar), Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till funktionen

   $$f(x) = xe^{2x},$$

   med restterm på ordoform (ordning 4).

   (c) Avgör om

   $$f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2}$$

   har en lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

På uppgift 2-3 ska endast svar ges på ett gemensamt papper.

2. (a) Lös differentialekvationen
$$y' - xy = 2x, \quad y(0) = 1. \qquad \text{(1p)}$$
(b) Bestäm den allmänna lösningen till
$$y'' - y' - 2y = 2x + 5. \qquad \text{(2p)}$$

3. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av parameterkurvan
$$x(t) = t^2,\ y(t) = e^t,\ 1 \leq t \leq 3. \qquad \text{(1p)}$$
(b) Bestäm en formel, samt rita en motiverande figur, för volymen av den kropp som uppstår då området givet av $1 \leq y \leq \mathrm{e}^x$, $0 \leq x \leq 2$, roterar ett varv kring linjen $x = -1$. (Svaret består alltså av figur och formel.) (2p)

Del B

På uppgift 4-6 krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

4. Lös integralekvationen $3y(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{y^2(t)}\, dt = 6$.

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med restterm i ordoform (ordning 5) till
$$f(x) = \ln(1 + \sin x) + \mathrm{e}^{x^2} - x\sqrt{1+x},$$
och avgör om f har lokalt extremvärde i $x = 0$; ange i så fall också vilken typ. Beräkna slutligen $f^{(4)}(0)$.

6. Ange en första ordningens linjär differentialekvation för $y(x)$, $x > 0$, sådan att x^{-x} är **en** homogenlösning, och x^2 är **en** partikulärlösning.