SVAR M.M., EXEMPELTENTA TATB08.

1a. Eftersom $\arctan x = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$ och $\sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ får vi

$$\frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \frac{(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)) - (x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5))}{x^3} = \frac{-x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \to -\frac{1}{3} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $-1/3$.

1b.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Alternativ 1, användning av formeln:

Med $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ får vi $f(0) = 0$, $f'(x) = (1 + 2x)\mathrm{e}^{2x}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = (4 + 4x)\mathrm{e}^{2x}$, $f''(0) = 4$, $f'''(x) = (12 + 8x)\mathrm{e}^{2x}$, $f'''(0) = 12$ så att

$$x\mathrm{e}^{2x} = x + 2x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Alternativ 2, användning av utvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$:

$$xe^{2x} = x(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \mathcal{O}((2x)^3)) = x + 2x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Svar: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. $x\mathrm{e}^{2x} = x + 2x^2 + 2x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

1c.

Vi utvecklar f så långt att vi ser den ledande variabla termen. Eftersom $\binom{1/2}{2} = -1/8$ får vi, med $t = x^2$, att $\sqrt{1+x^2} = (1+t)^{1/2} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + x^2/2 - x^4/8 + \mathcal{O}(x^6)$, så

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x + \sqrt{1+x^2} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6)\right) \\ &= 2 - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^6) = 2 + x^4\left(-\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x^2)\right). \end{aligned}$$

Eftersom $x^4 > 0$ då $x \neq 0$ och $-1/12 + \mathcal{O}(x^2) < 0$ för x nära 0 följer det att $f(x) < 2 = f(0)$ för $x \neq 0$ nära 0, så f har (strängt) lokalt maximum i $x = 0$.

Svar: Lokalt maximum.

2a. Eftersom $(-x^2/2)' = -x$ är $e^{-x^2/2}$ en integrerande faktor till $y' - xy = 2x$. Vi har nu

$$(e^{-x^2/2}y)' = e^{-x^2/2}(y' - xy) = e^{-x^2/2} \cdot 2x,$$

så att

$$e^{-x^2/2}y = \int 2xe^{-x^2/2}\,dx = -2e^{-x^2/2} + C,$$

vilket ger

$$y = -2 + Ce^{x^2/2}.$$

$y(0) = -2 + C = 1$ ger nu $C = 3$ så lösningen är

$$y = -2 + 3e^{x^2/2}.$$

Svar: $y = -2 + 3e^{x^2/2}$.

2b.

Det karaktäristiska polynomet till $y'' - y' - 2y$ ges av $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$, vilket ger homogenlösningarna

$$y_h = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-x}.$$

Ansatsen $y_p = ax + b$ ger $y_p' = a$ och $y_p'' = 0$. Insatt i ekvationen får vi

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = -a - 2(ax+b) = 2x + 5 \Leftrightarrow -2a = 2 \text{ och } -a - 2b = 5 \Leftrightarrow a = -1 \text{ och } b = -2.$$

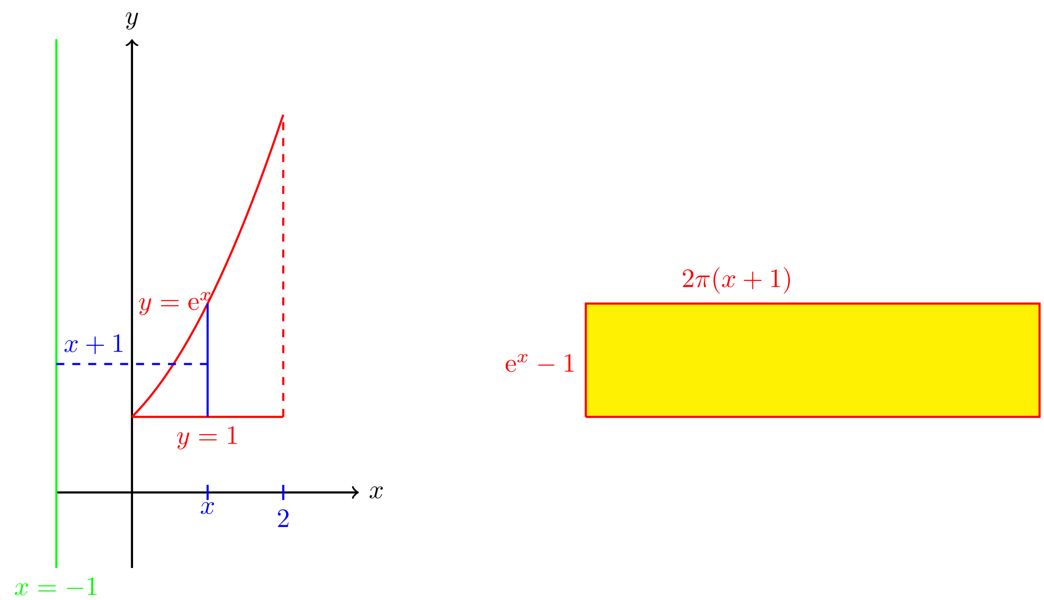
Svar: $y = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-x} - x - 2.$

3a.

$$\int_1^3 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{(2t)^2 + (\mathrm{e}^t)^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{4t^2 + \mathrm{e}^{2t}}\, dt.$$

Svar: $\int_1^3 \sqrt{4t^2 + \mathrm{e}^{2t}}\, dt.$

3b.



När den blå stolpen vid $x = 1$, som har höjd $e^x - 1$ roterar kring $x = -1$ så uppstår en cylinder som har radie $x + 1$, och mantelyta $2\pi(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x) = 2\pi(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx.$$

Alltså har vi

$$V = \int_0^2 dV(x) = 2\pi \int_0^2 (x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx.$$

Svar: Figur, se ovan. Volym $= 2\pi \int_0^2 (x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx.$

(I 3b går det även bra att beräkna volymen: via partialintegration får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dV(x) = 2\pi \int_0^2 (x+1)(\mathrm{e}^x - 1)\, dx \\ &= 2\pi \left[(x+1)\left(\mathrm{e}^x - x\right)\right]_0^2 - 2\pi \int_0^2 \left(\mathrm{e}^x - x\right)\, dx \\ &= 2\pi \left[(x+1)\left(\mathrm{e}^x - x\right) - \mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi\left(\mathrm{e}^2 - 2\right).) \end{aligned}$$

4.

Derivation av ekvationen, samt insättning av $x = 0$ ger att integralekvationen är ekvivalent med differentialekvationen $3y' - 2x/y^2 = 0$ med bivillkoret $3y(0) = 6$, dvs. $y(0) = 2$.

Om $y \neq 0$ har vi

$$3y' - 2x/y^2 = 0 \Leftrightarrow 3y' = 2x/y^2 \Leftrightarrow 3y^2y' = 2x.$$

Integration av bägge sidor ger

$$\int 3y^2y'dx = \int 3y^2dy = \int 2xdx \Leftrightarrow y^3 = x^2 + C.$$

Bivillkoret ger nu

$$2^3 = 0 + C \Leftrightarrow C = 8.$$

Alltså får vi

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 8}.$$

Eftersom $x^2 + 8 \geq 8$ ser vi att detta löser ekvationen på hela $\mathbb{R}$.

Svar: $y = \sqrt[3]{x^2 + 8}$, $-\infty < x < \infty$.

5.

Vi utvecklar först ln-termen. Standardutvecklingen $\ln(1 + t) = t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \mathcal{O}(t^5)$ använd med $t = \sin x = x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)$ (observera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) ger

$$t^2 = t \cdot t = x^2 - x^4/3 + \mathcal{O}(x^6);\ t^3 = t^2 \cdot t = x^3 + \mathcal{O}(x^5);\ t^4 = t^3 \cdot t = x^4 + \mathcal{O}(x^6);\ \mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5),$$

så

$$\begin{aligned}\ln(1 + \sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) + \mathcal{O}(x^5)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5).\end{aligned}$$

Vidare, med $t = x^2$,

$$e^{x^2} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6),$$

och

$$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4),$$

så

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1 + \sin x) + e^{x^2} - x\sqrt{1 + x}\\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \mathcal{O}(x^5)\right)\\ &= 1 + \frac{7x^3}{24} + \frac{17x^4}{48} + \mathcal{O}(x^5) = 1 + x^3\left(\frac{7}{24} + \mathcal{O}(x)\right),\end{aligned}$$

där det sista uttrycket inom parentes, $7/24 + \mathcal{O}(x)$, är nära $7/24$ och därmed > 0 då x är nära 0. Vidare, $x^3 > 0$ då $x > 0$ men $x^3 < 0$ då $x < 0$, varför $f(x) < 1 = f(0)$ då $x < 0$ nära 0, medan $f(x) > 1 = f(0)$ då $x > 0$ nära 0. Alltså har f inget lokalt extremvärde i $x = 0$.

Slutligen, koefficienten för x^4 är $f^{(4)}(0)/4! = 17/48$, så $f^{(4)}(0) = 17/2$.

Svar: $f(x) = 1 + \dfrac{7x^3}{24} + \dfrac{17x^4}{48} + \mathcal{O}(x^5)$; f har inget lokalt extremvärde i $x = 0$; $f^{(4)}(0) = \dfrac{17}{2}$.

6. En första ordningens linjär differentialekvation är på formen

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Den homogena ekvationen är $y' + f(x)y = 0$, och vi vet att den allmänna lösningen till denna är på formen

$$Ce^{-F(x)}$$

där $F'(x) = f(x)$. Vi vill alltså först och främst att $x^{-x} = e^{-x \ln x}$ ska vara en av dessa för något C, och om vi tar $C = 1$ ser vi att detta fungerar om $F(x) = x \ln x$.

Vänsterledet i ekvationen blir alltså med andra ord, eftersom $F'(x) = \ln x + 1$

$$y' + (\ln x + 1)y.$$

Om vi nu vill att $y_p = x^2$ ska vara en partikulärlösning, så sätter vi helt enkelt in detta i VL och får

$$y_p' + (\ln x + 1)y_p = 2x + (\ln x + 1)x^2 = x^2 \ln x + x^2 + 2x = g(x).$$

Svar: $y' + (\ln x + 1)y = x^2 \ln x + x^2 + 2x.$