

SVAR M.M., TATB08 2025-06-05.

1a. Eftersom $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ får vi med $t = x^2$ att $\ln(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)$, vilket ger

$$\frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4} = \frac{(x^2 - x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)) - x^2}{x^4} = \frac{-x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4} = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Svar: $-1/2$.

1b.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 + \arctan x - \sin x \\ &= -3 + (x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)) - (x - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5)) = -3 - x^3/6 + \mathcal{O}(x^5) = -3 + x^3(-1/6 + \mathcal{O}(x^2)). \end{aligned}$$

Eftersom

- $-1/6 + \mathcal{O}(x^2) < 0$ för x nära 0,
- $x^3 < 0$ för $x < 0$,
- $x^3 > 0$ för $x > 0$

får vi att $f(x) > f(0)$ om $x < 0$ nära 0, och $f(x) < f(0)$ om $x > 0$ nära 0. Alltså har vi ingen lokal extrempunkt i $x = 0$.

Svar: Ingen lokal extrempunkt.

1c.

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3).$$

Med $f(x) = e^{2x} + 3x$ får vi $f(1) = e^2 + 3$, $f'(x) = 2e^{2x} + 3$, $f'(1) = 2e^2 + 3$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f''(1) = 4e^2$ vilket insatt i formeln ger

$$e^{2x} + 3x = e^2 + 3 + (2e^2 + 3)(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3).$$

Svar: $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3) = e^2 + 3 + (2e^2 + 3)(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \mathcal{O}((x-1)^3).$

2a. Eftersom $r^3 - 2r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1) = r(r-1)^2$ och ekvationen är homogen så ges den allmänna lösningen av

$$y = A + (Bx + C)e^x.$$

Svar: $y = A + (Bx + C)e^x$.

2b. Eftersom $(x^3)' = 3x^2$ så är e^{x^3} en integrerande faktor. Vi ser nu att

$$(e^{x^3}y)' = e^{x^3}(y' + 3x^2y).$$

Så för den första ekvationen får vi

$$y' + 3x^2y = 0 \Leftrightarrow (e^{x^3}y)' = 0 \Leftrightarrow e^{x^3}y = C \Leftrightarrow y = Ce^{-x^3}.$$

När det gäller den andra ekvationen kan man direkt se att $y = 2$ är en partikulärlösning, vilket ger den allmänna lösningen

$$y = Ce^{-x^3} + 2.$$

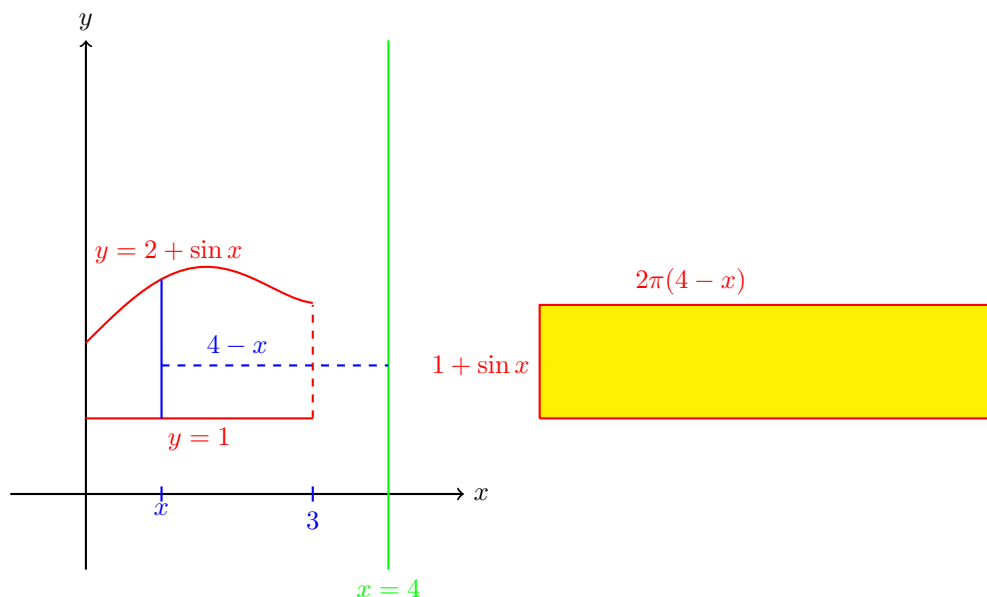
Alternativt kan vi integrera:

$$y' + 3x^2y = 6x^2 \Leftrightarrow (e^{x^3}y)' = 6x^2e^{x^3} \Leftrightarrow e^{x^3}y = C + 2e^{x^3} \Leftrightarrow y = Ce^{-x^3} + 2,$$

eftersom $(2e^{x^3})' = 6x^2e^{x^3}$.

Svar: $y = Ce^{-x^3}$ respektive $y = Ce^{-x^3} + 2$.

3a.



När den blå stolpen vid $x = 1$, som har höjd $1 + \sin x$ roterar kring $x = 4$ så uppstår mantelytan av en cylinder som har radie $4 - x$, och area $2\pi(4 - x)(1 + \sin x)$. Genom att multiplicera mantelarean för denna cylinder med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

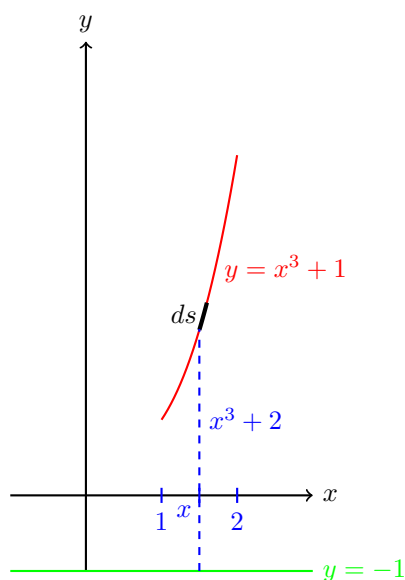
$$dV(x) = 2\pi(4 - x)(1 + \sin x) dx.$$

Alltså har vi

$$V = \int_0^3 2\pi(4 - x)(1 + \sin x) dx.$$

Svar: Figur, se ovan. $\int_0^3 2\pi(4 - x)(1 + \sin x) dx$.

3b.



När det lilla ds -elementet roterar ett varv runt $y = -1$ uppstår mantelytan av en sned cylinder med area

$$dA = 2\pi(x^3 + 2) ds = 2\pi(x^3 + 2)\sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi(x^3 + 2)\sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Alltså får vi den totala arean

$$\int_1^2 2\pi(x^3 + 2)\sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Svar: Figur, se ovan. Area = $\int_1^2 2\pi(x^3 + 2)\sqrt{1 + 9x^4} dx$.

4. Genom att derivera ekvationen, respektive sätta in $x = 0$ får vi att den är ekvivalent med

$$\begin{cases} 3y' - 3x^2(1 + y^2) = 0 & (DE) \\ y(0) = 1 & (BV). \end{cases}$$

Vi börjar med (DE) och noterar att den är ekvivalent med $y' = x^2(1 + y^2)$ som i sin tur är ekvivalent med

$$\frac{1}{1 + y^2} y' = x^2.$$

Integration av bägge sidor ger nu

$$\arctan y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Användning av (BV) ger nu

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = C.$$

Alltså ser vi att

$$y = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right),$$

där definitionsintervallet ges av att

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Den nedre olikheten ovan ger

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x^3 > -9\pi/4 \Leftrightarrow x > -\sqrt[3]{9\pi/4}.$$

Den övre olikheten ger i sin tur

$$\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^3 < 3\pi/4 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{3\pi/4}.$$

(Observera att $x = 0$ ligger i detta intervall. Vi kan också notera att detta är det största intervall som innehåller $x = 0$ där funktionen är definierad och kontinuerlig.)

$$\textbf{Svar: } y = \tan\left(\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt[3]{9\pi/4} < x < \sqrt[3]{3\pi/4}.$$

5. Om vi använder standardutvecklingarna

$$\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/4! + \mathcal{O}(t^6),$$

$$\sin s = s + \mathcal{O}(s^3)$$

och

$$\sqrt{1+r} = 1 + r/2 - r^2/8 + \mathcal{O}(r^3)$$

får vi

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x^3) + \sin(x^6)} &= \sqrt{(1 - x^6/2 + x^{12}/24 + \mathcal{O}(x^{18})) + (x^6 + \mathcal{O}(x^{18}))} \\ &= \sqrt{1 + x^6/2 + x^{12}/24 + \mathcal{O}(x^{18})} \\ &= 1 + \frac{x^6/2 + x^{12}/24 + \mathcal{O}(x^{18})}{2} - \frac{(x^6/2 + x^{12}/24 + \mathcal{O}(x^{18}))^2}{8} + \mathcal{O}((x^6/2 + x^{12}/24 + \mathcal{O}(x^{18}))^3) \\ &= 1 + \frac{x^6}{4} - \frac{x^{12}}{96} + \mathcal{O}(x^{18}). \end{aligned}$$

Vi kan nu läsa av att

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f^{(6)}(0) = 180,$$

och eftersom det inte finns någon term av grad 17 med i utvecklingen gäller $f^{(17)}(0) = 0$.

$$\textbf{Svar: } f^{(6)}(0) = 180 \text{ och } f^{(17)}(0) = 0.$$

6. Definitionen är att

$$f(x) = b(x)x^6$$

där $b(x)$ är en funktion som är begränsad i någon omgivning till $x = 0$. Vi vet från vår standardutveckling att

$$\ln(1+t) = t + b_1(t)t^2$$

för någon funktion $b_1(t)$ som är begränsad för t nära 0. Eftersom $x^4 \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ följer med $t = x^4$ att funktionen $b_2(x) = b_1(x^4)$ också är begränsad för x nära 0, och vi har således

$$\ln(1+x^4) = x^4 + b_2(x)x^8.$$

Vidare per definition gäller att

$$x^2\mathcal{O}(x^4) = x^2(b_3(x)x^4) = b_3(x)x^6$$

och

$$\mathcal{O}(x^8) = b_4(x)x^8$$

där $b_3(x)$ och $b_4(x)$ också är begränsade nära $x = 0$.

Alltså får vi

$$\begin{aligned}\ln(1+x^4) + x^2\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^8) &= x^4 + b_2(x)x^8 + b_3(x)x^6 + b_4(x)x^8 \\ &= x^4 + (b_2(x)x^2 + b_3(x) + b_4(x)x^2)x^6 = x^4 + b(x)x^6.\end{aligned}$$

Enligt antagande gäller för x tillräckligt nära 0 att $|b_i(x)| \leq C_i$ för några konstanter, så om vi också väljer $|x| < 1$ får vi

$$|b(x)| = |b_2(x)x^2 + b_3(x) + b_4(x)x^2| \leq |b_2(x)||x|^2 + |b_3(x)| + |b_4(x)||x|^2 \leq C_1 + C_2 + C_3$$

så att även $b(x)$ är begränsad nära $x = 0$.