

SVAR M.M., TATB08 2025-08-28.

1a. Eftersom $\cos t = 1 - t^2/2 + \mathcal{O}(t^4)$ och $\ln(1+t) = t - t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ får vi med $t = x^2$ att

$$\frac{\cos(x^2) - 1}{x^1 - \ln(1+x^2)} = \frac{(1 - x^4/2 + \mathcal{O}(x^8)) - 1}{x^2 - (x^2 - x^4/2 + \mathcal{O}(x^6))} = \frac{-x^4/2 + \mathcal{O}(x^8)}{x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{-1/2 + \mathcal{O}(x^4)}{1/2 + \mathcal{O}(x^2)} \rightarrow -1 \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Svar: -1 .

1b. Vi ser att $x^2/2 - 2x + 2 = (x-2)^2/2$. Så med $x = 2+t$ får vi

$$\begin{aligned} f(2+t) &= \cos t + \frac{t^2}{2} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \mathcal{O}(t^6) + \frac{t^2}{2} \\ &= 1 + t^4 \left(\frac{1}{24} + \mathcal{O}(t^2) \right). \end{aligned}$$

Eftersom $t^4 \geq 0$ och $(1/24 + \mathcal{O}(t^2)) > 0$ för t nära 0 ser vi att

$$f(2+t) \geq f(2) \text{ för alla } t \text{ nära } 0.$$

Alltså har funktionen ett lokalt minimum i $x = 2$.

Svar: Lokalt minimum.

1c.

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \mathcal{O}((x+1)^3).$$

Med $f(x) = (3+x)^{1/3}$ får vi $f(-1) = 2^{1/3}$, $f'(x) = (3+x)^{-2/3}/3$, $f'(-1) = 1/(3 \cdot 2^{2/3})$, $f''(x) = -2(3+x)^{-5/3}/9$, $f''(-1) = -1/(9 \cdot 2^{5/3})$ vilket insatt i formeln ger

$$(3+x)^{1/3} = 2^{1/3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}(x+1) - \frac{1}{9 \cdot 2^{5/3}}(x+1)^2 + \mathcal{O}((x+1)^3).$$

Svar:
$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \mathcal{O}((x+1)^3) \\ &= 2^{1/3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}}(x+1) - \frac{1}{9 \cdot 2^{5/3}}(x+1)^2 + \mathcal{O}((x+1)^3). \end{aligned}$$

2a. Ekvationen är linjär, och eftersom $(2x^4)' = 8x^3$ ser vi att e^{2x^4} är en integrerande faktor:

$$\left(e^{2x^4} y \right)' = e^{2x^4} \cdot (y' + 8x^3 y) = 0.$$

Detta är ekvivalent med att

$$e^{2x^4} y = C \Leftrightarrow y = Ce^{-2x^4}.$$

Svar: $y = Ce^{-2x^4}$.

2b. Ekvationen är separabel. Vi noterar att eftersom $3 + y^2 > 0$ för alla y så är ekvationen ekvivalent med

$$\frac{2y}{3 + y^2} y' = 4x.$$

Integration av bägge sidor ger (eftersom $y'dx = dy$)

$$\int \frac{2y}{3 + y^2} dy = \int 4x dx,$$

så

$$\ln(3 + y^2) = 2x^2 + C.$$

(Man kunde ovan förstås delat på $12 + 4y^2$ istället för $3 + y^2$, men det senare ger lite trevligare siffror i beräkningarna.)

Bivillkoret $y(0) = 2$ ger nu

$$\ln(3 + 2^2) = \ln 7 = C.$$

Alltså får vi

$$e^{\ln(3+y^2)} = e^{2x^2 + \ln(7)} \Leftrightarrow 3 + y^2 = 7e^{2x^2}.$$

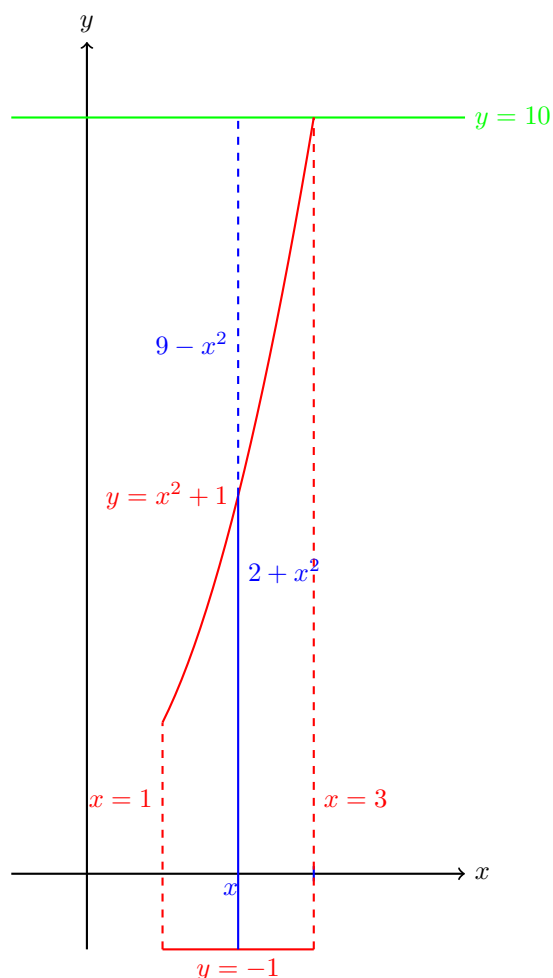
Lösningen till den sista ekvationen ovan är

$$y = \pm \sqrt{7e^{2x^2} - 3},$$

men eftersom $y(0) > 0$ ser vi att det är den positiva lösningen som gäller för vårt problem. Vi noterar även att eftersom $7e^{2x^2} - 3 \geq 4$ för alla x gäller denna lösning för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y = \sqrt{7e^{2x^2} - 3}$, $x \in \mathbb{R}$.

3a.



När den blå stolpen vid x (som har höjd $2 + x^2$) roterar kring $y = 10$ så uppstår en ihålig cirkelskiva med inre radie $9 - x^2$ och yttre radie 11. Alltså har denna area $\pi \cdot 11^2 - \pi \cdot (9 - x^2)^2 = \pi \cdot (40 + 18x^2 - x^4)$. Genom att multiplicera denna area med en liten tjocklek dx så erhåller vi volymselementen

$$dV(x) = \pi \cdot (40 + 18x^2 - x^4) dx.$$

Alltså har vi

$$V = \int_1^3 \pi \cdot (40 + 18x^2 - x^4) dx.$$

Svar: Figur, se ovan. Volym $= \int_1^3 \pi \cdot (40 + 18x^2 - x^4) dx$.

3b. Längden ges av formeln

$$\int_0^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^2 \sqrt{9t^4 + 4e^{4t}} dt.$$

Svar: Längd $= \int_0^2 \sqrt{9t^4 + 4e^{4t}} dt$.

4. Det karakteristiska polynomet uppfyller

$$r^3 + 4r^2 + 13r = r(r^2 + 4r + 13) = r(r + 2 + 3i)(r + 2 - 3i).$$

Alltså ges den allmänna homogenlösningen av

$$y_h = A + Be^{-2x} \cos(3x) + Ce^{-2x} \sin(3x).$$

Vi gör nu partikuläransatsen

$$y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x),$$

vilket ger

$$y_p' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x),$$

$$y_p'' = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x),$$

$$y_p''' = 8a \sin(2x) - 8b \cos(2x).$$

Om vi sätter in detta i ekvationen får vi

$$y_p''' + 4y_p'' + 13y_p' = \dots = (-18a - 16b) \sin(2x) + (-16a + 18b) \cos(2x) = -20 \sin(2x) - 50 \cos(2x).$$

Dvs. vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} -18a - 16b = -20 \\ -16a + 18b = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Alltså gäller $y_p = 2 \cos(2x) - \sin(2x)$.

$$\textbf{Svar: } y = y_h + y_p = A + Be^{-2x} \cos(3x) + Ce^{-2x} \sin(3x) + 2 \cos(2x) - \sin(2x).$$

5. Med $x = 1 + t$ får vi

$$f(1+t) = t^5 \ln(\sqrt{1+t}).$$

Vi kan nu använda standardutvecklingen

$$\sqrt{1+t} = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3),$$

så att

$$\ln(\sqrt{1+t}) = \ln(1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3)) = \ln(1+s),$$

där $s = t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3)$. Om vi nu använder standardutvecklingen $\ln(1+s) = s - s^2/2 + \mathcal{O}(s^3)$ får vi alltså

$$\begin{aligned} t^5 \ln(\sqrt{1+t}) &= t^5 \ln(1+s) = t^5 (s - s^2/2 + \mathcal{O}(s^3)) \\ &= t^5 \left(\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathcal{O}(t^3) \right) - \frac{\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathcal{O}(t^3) \right)^2}{2} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \mathcal{O}(t^3) \right)^3 \right)}_{\mathcal{O}(t^3)} \right) \\ &= t^5 \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \mathcal{O}(t^3) \right) = \frac{t^6}{2} - \frac{t^7}{4} + \mathcal{O}(t^8) \\ &= \frac{(x-1)^6}{2} - \frac{(x-1)^7}{4} + \mathcal{O}((x-1)^8). \end{aligned}$$

Enligt entydighetssatsen för Taylorutvecklingar är det sista uttrycket ovan Taylorutvecklingen av ordning 7 till $f(x)$ i $x = 1$.

Alltså vet vi att

$$\frac{f^{(6)}(1)}{6!} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^{(6)}(1) = 6!/2 = 360$$

och

$$\frac{f^{(7)}(1)}{7!} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow f^{(7)}(1) = -7!/4 = -1260.$$

$$\textbf{Svar: } f^{(6)}(1) = 360 \text{ och } f^{(7)}(1) = -1260.$$

6. Om vi låter $z = y'$ får vi ekvationen

$$z' + \frac{2x}{1+x^2}z = x^3.$$

Detta är en första ordnings linjär ekvation för z , och eftersom $(\ln(1+x^2))' = 2x/(1+x^2)$ ser vi att

$$e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$$

är en integrerande faktor. Vi får alltså

$$((1+x^2)z)' = (1+x^2)z' + 2xz = (1+x^2)x^3 = x^3 + x^5.$$

Integrerar vi får vi alltså

$$(1+x^2)z = \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + C.$$

Dvs.

$$z = \frac{x^4/4 + x^6/6 + C}{1+x^2} = \frac{1}{12} \cdot (2x^4 + x^2 - 1) + \frac{D}{1+x^2},$$

där $D = C + 1/12$. Om vi nu integrerar en gång till får vi alltså

$$y = \frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{36} - \frac{x}{12} + D \arctan x + E.$$

$$\textbf{Svar: } y = x^5/30 + x^3/36 - x/12 + D \arctan x + E.$$