

Tentamen i Envariabelanalys del 2

2025-06-05, 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 3p vardera.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 4–6, värda 3p vardera.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall krav K1, K2 och K3 vara uppfyllda:

- K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, eller (men bara för betyg 3) motsvarande KTR godkänd,
K2: minst två godkända uppgifter på del A (där KTR inte kan hjälpa till),
K3: minst 3/4/5 godkända uppgifter samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan. För godkänt, upp till 8p, ger varje godkänd KTR 1 poäng.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Standardutvecklingar:

$$\begin{array}{lcl} e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6), \\ \sin x & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9), \\ (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4), \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \cos x & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8), \\ \arctan x & = & x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9), \\ \ln(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^6), \end{array} \right.$$

Ovan är α en **konstant** och $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}$, $\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\dots$

Del A

På uppgift 1 krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

1. (a) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4}$.

(b) Avgör om

$$f(x) = -3 + \arctan x - \sin x$$

har en lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

(c) Skriv upp den allmänna formeln för Taylorutvecklingen av ordning 2 till en funktion $f(x)$ i punkten $x = 1$, samt bestäm speciellt Taylorutvecklingen av ordning 2 i $x = 1$ till funktionen

$$f(x) = e^{2x} + 3x,$$

med restterm på ordoform (ordning 3).

På uppgift 2-3 ska endast svar ges på ett gemensamt papper.

2. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''' - 2y'' + y' = 0. \quad (1p)$$

- (b) Bestäm de allmänna lösningarna till differentialekvationerna

$$y' + 3x^2y = 0 \text{ och } y' + 3x^2y = 6x^2. \quad (2p)$$

3. (a) Bestäm en formel, samt rita en motiverande figur, för volymen av den kropp som uppstår då området givet av $1 \leq y \leq 2 + \sin x$, $0 \leq x \leq 3$, roterar ett varv kring linjen $x = 4$. (Svaret består alltså av figur och formel.) (2p)

- (b) Bestäm en formel, samt rita en motiverande figur, för arean av den yta som uppkommer då kurvan $y = x^3 + 1$, $1 \leq x \leq 2$, roteras ett varv runt $y = -1$. (Svaret består alltså av figur och formel.) (1p)
-

Del B

På uppgift 4-6 krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

4. Lös integralekvationen $3y(x) - \int_0^x 3t^2(1+y^2(t)) dt = 3$, samt ange lösningens definitionsmängd.

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 17 med restterm på ordoform (ordning 18) till

$$f(x) = \sqrt{\cos(x^3) + \sin(x^6)},$$

samt beräkna $f^{(6)}(0)$ och $f^{(17)}(0)$.

6. Ange definitionen av att $f(x) = \mathcal{O}(x^6)$ då $x \rightarrow 0$, samt visa utgående från denna definition att

$$\ln(1+x^4) + x^2\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^8) = x^4 + \mathcal{O}(x^6) \text{ då } x \rightarrow 0.$$

(Motivera tydligt! Standardutvecklingen av $\ln(1+t)$ får användas utan att motiveras.)