Differentialekvationer, bivillkor, och definitionsmängd till lösningar

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation för en funktion y som beror av en variabel x och som innehåller derivator till y.

Differentialekvationer

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation för en funktion y som beror av en variabel x och som innehåller derivator till y.
- Den högsta ordningen på derivator som förekommer i ekvationen kallas ekvationens ordning.

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation för en funktion y som beror av en variabel x och som innehåller derivator till y.
- Den högsta ordningen på derivator som förekommer i ekvationen kallas ekvationens ordning.
- Lösningar till en differentialekvation med bivillkor, säg

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

ska vara definierade på ett **intervall** som innehåller a.

- En ordinär differentialekvation (ODE) är en ekvation för en funktion y som beror av en variabel x och som innehåller derivator till y.
- Den högsta ordningen på derivator som förekommer i ekvationen kallas ekvationens ordning.
- Lösningar till en differentialekvation med bivillkor, säg

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(a) = b,$$

  ska vara definierade på ett **intervall** som innehåller a.
- Vi skriver oftast t ex $y' = f(x, y)$ snarare än $y'(x) = f(x, y)$.

Exempel

Differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2, x > 0$$

har lösningarna

$$y = \frac{x^3}{2} + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2, x > 0$$

har lösningarna

$$y = \frac{x^3}{2} + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} + c.$$

Exempel

Differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2, x > 0$$

har lösningarna

$$y = \frac{x^3}{2} + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} + c.$$

y och y' insatta i VL i ekvationen ger:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{3x^2}{2} + c - \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{2} + cx\right) = \frac{3x^2 - x^2}{2} = x^2.$$

Exempel

Ekvationen

$$y'' - y' - 12y = 0$$

har lösningarna

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bivillkor

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = x^2, x > 0, \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Bivillkor

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = x^2, x > 0, \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y' - 12y = 0, \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Definitionsmängd för lösningar

$$\begin{cases} y' = 1/x^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Definitionsmängd för lösningar

$$\begin{cases} y' = 1/x^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c.$$

Definitionsmängd för lösningar

$$\begin{cases} y' = 1/x^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c.$$

$$y(1) = -1/1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2.$$

Definitionsmängd för lösningar

$$\begin{cases} y' = 1/x^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c.$$

$$y(1) = -1/1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2.$$

$$y = -1/x + 2, \quad 0 < x < \infty.$$

Definitionsmängd för lösningar

$$\begin{cases} y' = 1/x^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

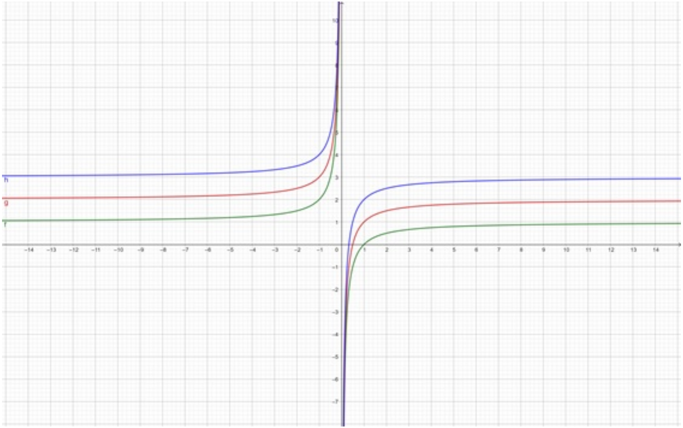
$$y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c.$$

$$y(1) = -1/1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2.$$

$$y = -1/x + 2, \quad 0 < x < \infty.$$

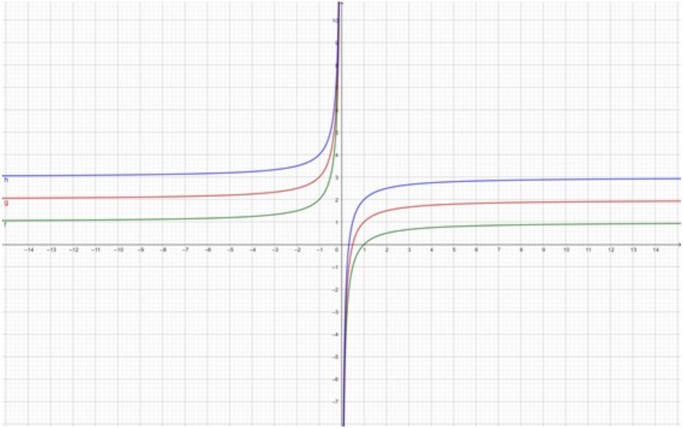
Definitionsmängden är det största öppna **intervallet** där $-1/x + 2$ löser ekvationen som innehåller $x = 1$ (den punkt där bivillkoret är givet).

Definitionsmängd för lösningar



$$\begin{cases} y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c, \\ y(1) = -1/1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2. \end{cases}$$

Definitionsmängd för lösningar



$$\begin{cases} y' = 1/x^2 \Leftrightarrow y = -1/x + c, \\ y(1) = -1/1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 2. \end{cases} \quad y = \begin{cases} -1/x + 2, & x > 0 \\ -1/x + 3, & x < 0. \end{cases}$$