Stora ordo och entydighetssatsen för Taylorutvecklingar

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Taylors sats (repetition)

Sats

Antag att $f(x)$ är definierad och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till punkten $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + b(x)(x-a)^{n+1},$$

där $b(x)$ är definierad och begränsad i någon omgivning till a.

Taylors sats (repetition)

Sats

Antag att $f(x)$ är definierad och har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n+1$ i någon omgivning till punkten $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + b(x)(x-a)^{n+1},$$

där $b(x)$ är definierad och begränsad i någon omgivning till a.

Att $b(x)$ är begränsad i någon omgivning till $x = a$ betyder att det finns en konstant C och något öppet intervall runt a sådant att $|b(x)| \leq C$ på detta intervall.

Stora Ordo

Stora Ordo

Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till a sådan att $f(x) = b(x)(x-a)^{n+1}$.

Stora Ordo

Definition

Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till a sådan att $f(x) = b(x)(x-a)^{n+1}$.

T ex. $x^3 - x^2 = x^2(x-1) = \mathcal{O}((x-1))$ då $x \to 1$, eftersom x^2 är begränsad nära $x = 1$.

Stora Ordo

Definition

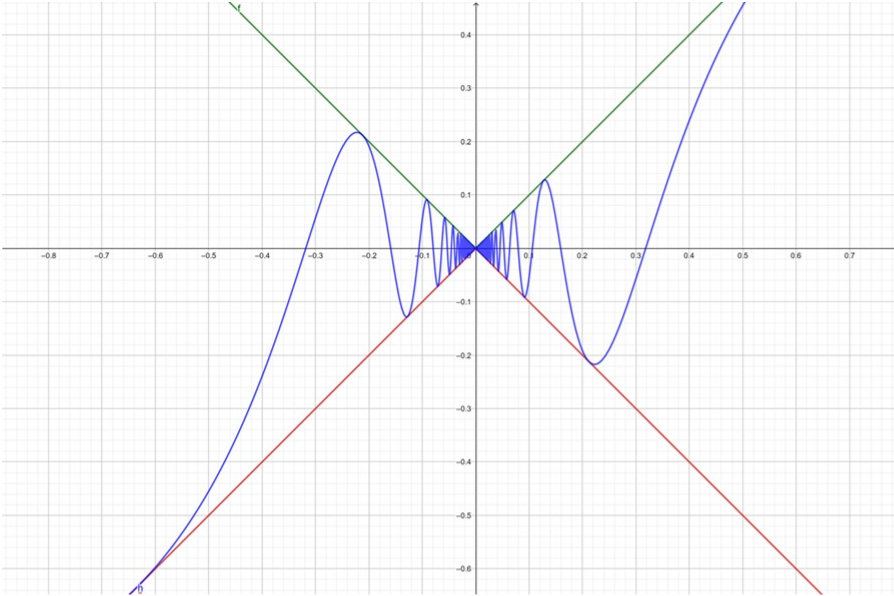
Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till a sådan att $f(x) = b(x)(x-a)^{n+1}$.

T ex. $x^3 - x^2 = x^2(x-1) = \mathcal{O}((x-1))$ då $x \to 1$, eftersom x^2 är begränsad nära $x = 1$.
Mer generellt:

Definition

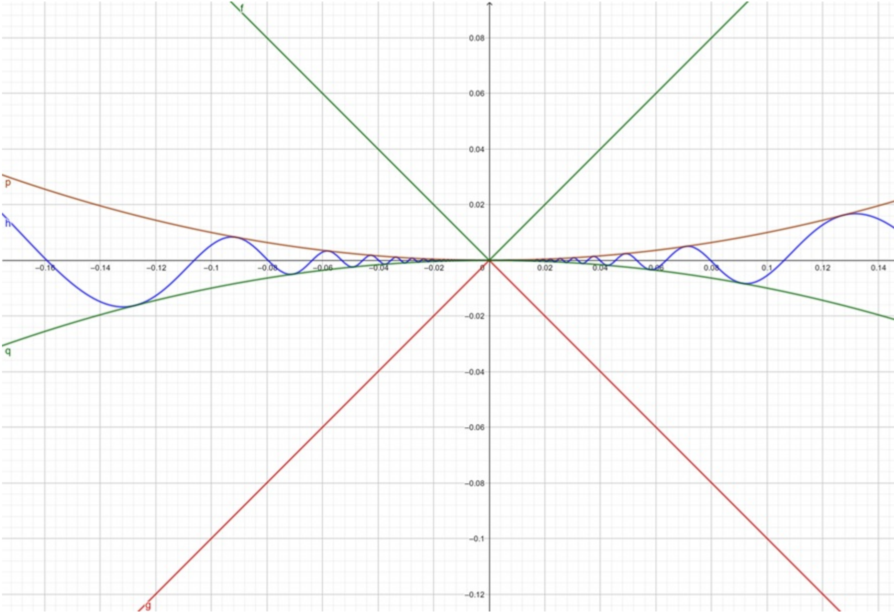
Vi säger att $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ då $x \to a$ om det finns en funktion $b(x)$ som är begränsad i någon omgivning till a sådan att $f(x) = b(x)g(x)$.

$\mathcal{O}(x)$



f
h
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.6
−0.8
−0.7
−0.6
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

$\mathcal{O}(x^2)$


f
g
h
p
q
0.08
0.06
0.04
0.02
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
−0.12
−0.14
−0.12
−0.1
−0.02
0
0.02
0.04
0.1
0.12
0.14

Stora Ordo

Stora Ordo

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs.

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs. Ett par exempel då $x \to 0$:

Stora Ordo

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs. Ett par exempel då $x \to 0$:

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5) :$$

Stora Ordo

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs. Ett par exempel då $x \to 0$:

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5) :$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2)x^5.$$

Stora Ordo

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs. Ett par exempel då $x \to 0$:

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2)x^5.$$

$$\mathcal{O}(x^5 + x^8) = \mathcal{O}(x^5):$$

Stora Ordo

Ofta är a underförstått. T.ex. om vi skriver $\mathcal{O}((x-a)^3)$ är det underförstått att vi menar då $x \to a$ om inget annat sägs. Ett par exempel då $x \to 0$:

$$\mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b_1(x)x^5 + b_2(x)x^7 = (b_1(x) + b_2(x)x^2)x^5.$$

$$\mathcal{O}(x^5 + x^8) = \mathcal{O}(x^5):$$

$$b(x)(x^5 + x^8) = (b(x)(1 + x^3))x^5.$$

Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från "bättre" till "sämre" i höger-riktningen.

Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från ”bättre” till ”sämre” i höger-riktningen.
- T.ex. $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$, men $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$.

Några varningar

- När vi jobbar med stora ordo blir likhetstecknet i princip ENKELRIKTAT, där vi får gå från "bättre" till "sämre" i höger-riktningen.
- T.ex. $\mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$, men $\mathcal{O}(x^2) \neq \mathcal{O}(x^3)$.
- Notera att t.ex. $(x-1)^2$ inte går mot noll då $x \to 0$, så då $x \to 0$ betecknar $\mathcal{O}((x-1)^2)$ bara en begränsad funktion!

Sats

Om $q(x)$ är ett polynom av grad högst n sådant att $f(x) - q(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$, då är $q(x) = p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning n till f i a.

Sats

Om $q(x)$ är ett polynom av grad högst n sådant att $f(x) - q(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$, då är $q(x) = p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning n till f i a.

Detta följer av att

$$q(x) - p_n(x) = (q(x) - f(x)) - (p_n(x) - f(x)) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$$

vilket inte kan gälla om inte $q(x) - p_n(x) = 0$ eftersom det annars skulle innehålla en term av grad lägre än n.

Tillämpningar

- En tillämpning vi kan använda ovanstående till är bland annat att beräkna utvecklingar av sammansatta funktioner från standardutvecklingar med hjälp av ordokalkyl.

Tillämpningar

- En tillämpning vi kan använda ovanstående till är bland annat att beräkna utvecklingar av sammansatta funktioner från standardutvecklingar med hjälp av ordokalkyl.
- Vi kan även med hjälp av detta beräkna derivator av funktionen vi får fram en sådan utveckling till (i punkten vi utvecklat i).