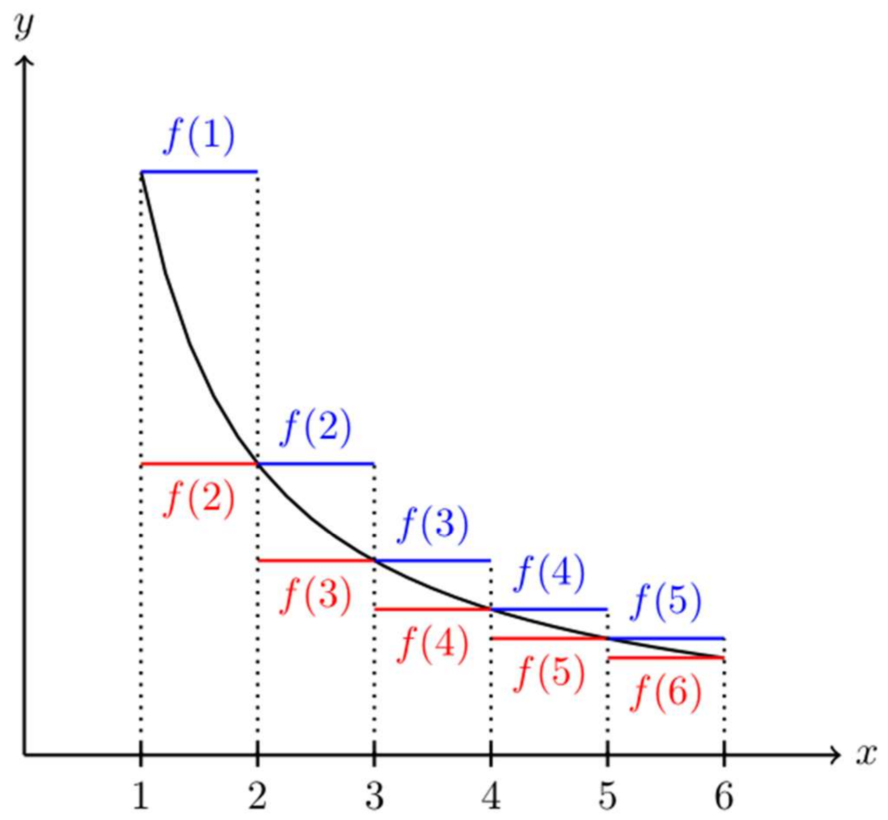
Uppskattning av serier med integraler och vice versa

För **avtagande positiva funktioner** finns det ett mycket direkt samband mellan serier och integraler, för om $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ är **avtagande**, då är det lätt geometriskt att inse att vi för varje n har följande uppskattningar:

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$



Sats B2.4 (Cauchys integralkriterium)
Om funktionen $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *är avtagande så är serien* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *och integralen* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *antingen båda konvergenta eller divergenta.*

$$\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^{\alpha}}}_{f(x)} dx$$ konv. om och endast om $\alpha > 1$.

$f(k) = \frac{1}{k^{\alpha}}$

Sats B2.5 (Jämförelseserier)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

är konvergent om $\alpha > 1$ *och divergent om* $\alpha \leq 1$.