Exempel

Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - y' - 12y = x\mathrm{e}^{4x}$.

Lösning

Lösning

Homogen ekvation:

Lösning

Homogen ekvation:$r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$

Lösning

Homogen ekvation: $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

Lösning

Homogen ekvation: $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

Partikulärlösning:

Homogen ekvation: $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

Partikulärlösning: Substitutionen $y_p = z\mathrm{e}^{4x}$ ger:

Lösning

Homogen ekvation:$r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

Partikulärlösning: Substitutionen $y_p = z\mathrm{e}^{4x}$ ger:

$$(D^2 - D - 12)z\mathrm{e}^{4x} = (D+3)(D-4)z\mathrm{e}^{4x} =$$

Lösning

Homogen ekvation: $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

Partikulärlösning: Substitutionen $y_p = z\mathrm{e}^{4x}$ ger:

$$(D^2 - D - 12)z\mathrm{e}^{4x} = (D+3)(D-4)z\mathrm{e}^{4x} =$$

$$\mathrm{e}^{4x}(D+7)Dz = \mathrm{e}^{4x}(z'' + 7z') = x\mathrm{e}^{4x}.$$

Lösning

Homogen ekvation: $r^2 - r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ eller $r = 4$.
Den homogena ekvationen $y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{4x}.$$

Partikulärlösning: Substitutionen $y_p = z\mathrm{e}^{4x}$ ger:

$$(D^2 - D - 12)z\mathrm{e}^{4x} = (D+3)(D-4)z\mathrm{e}^{4x} =$$

$$\mathrm{e}^{4x}(D+7)Dz = \mathrm{e}^{4x}(z'' + 7z') = x\mathrm{e}^{4x}.$$

$$z'' + 7z' = x:$$

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z' = 2ax + b, \quad z'' = 2a,$$

Insatt i ekvationen:

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z' = 2ax + b, \quad z'' = 2a,$$

Insatt i ekvationen:

$$2a + 7(2ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z' = 2ax + b, \quad z'' = 2a,$$

Insatt i ekvationen:

$$2a + 7(2ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + 7b = 0 \\ 14a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/14 \\ b = -1/49 \end{cases}.$$

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z' = 2ax + b, \quad z'' = 2a,$$

Insatt i ekvationen:

$$2a + 7(2ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + 7b = 0 \\ 14a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/14 \\ b = -1/49 \end{cases}.$$

$$y_p = z\mathrm{e}^{4x} = (x^2/14 - x/49)\mathrm{e}^{4x}.$$

$$z'' + 7z' = x:$$

Ansats $z = ax^2 + bx$:

$$z' = 2ax + b, \quad z'' = 2a,$$

Insatt i ekvationen:

$$2a + 7(2ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a + 7b = 0 \\ 14a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/14 \\ b = -1/49 \end{cases}.$$

$$y_p = z\mathrm{e}^{4x} = (x^2/14 - x/49)\mathrm{e}^{4x}.$$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1\mathrm{e}^{-3x} + (C_2 + x^2/14 - x/49)\mathrm{e}^{4x}.$