

Bestäm den allmänna lösningen till $y'' - y' - 12y = 24x^2 - 8x - 5$.

Den allmänna lösningen ges av

$$y = y_h + y_p$$

där y_h är **den allmänna** lösningen till den homogena ekvationen

$$y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$$

och y_p är **en** så kallad partikulärlösning, dvs. **en** funktion som löser

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Allmän homogenlösning

Allmän homogenlösning

$$y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$$

$$y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$$

Den karaktäristiska ekvationen

$$r^2 - r - 12 = 0$$

har lösningarna

$$r = -3 \text{ och } r = 4.$$

$$y_h'' - y_h' - 12y_h = 0$$

Den **karaktäristiska** ekvationen

$$r^2 - r - 12 = 0$$

har lösningarna

$$r = -3 \text{ och } r = 4.$$

Den homogena ekvationen har därför den allmänna lösningen

$$y_h = Ae^{-3x} + Be^{4x}.$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansatz $y_p = ax^2 + bx + c$,

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansatz $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c)$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' - 12y_p &= 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c) \\ &= -12ax^2 + (-2a - 12b)x + (2a - b - 12c) \end{aligned}$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}y_p'' - y_p' - 12y_p &= 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c) \\&= -12ax^2 + (-2a - 12b)x + (2a - b - 12c) \\&= 24x^2 - 8x - 5.\end{aligned}$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' - 12y_p &= 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c) \\ &= -12ax^2 + (-2a - 12b)x + (2a - b - 12c) \\ &= 24x^2 - 8x - 5. \end{aligned}$$

Genom att jämföra koefficienterna i sista likheten får vi nu det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -12a = 24 \\ -2a - 12b = -8 \\ 2a - b - 12c = -5, \end{cases}$$

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}y_p'' - y_p' - 12y_p &= 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c) \\&= -12ax^2 + (-2a - 12b)x + (2a - b - 12c) \\&= 24x^2 - 8x - 5.\end{aligned}$$

Genom att jämföra koefficienterna i sista likheten får vi nu det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -12a = 24 \\ -2a - 12b = -8 \\ 2a - b - 12c = -5, \end{cases}$$

som har lösningen $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$.

$$y_p'' - y_p' - 12y_p = 24x^2 - 8x - 5.$$

Ansats $y_p = ax^2 + bx + c$, ger: $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$.

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' - 12y_p &= 2a - (2ax + b) - 12(ax^2 + bx + c) \\ &= -12ax^2 + (-2a - 12b)x + (2a - b - 12c) \\ &= 24x^2 - 8x - 5. \end{aligned}$$

Genom att jämföra koefficienterna i sista likheten får vi nu det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} -12a = 24 \\ -2a - 12b = -8 \\ 2a - b - 12c = -5, \end{cases}$$

som har lösningen $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$. Det vill säga

$$y_p = -2x^2 + x.$$

Svar: $y = y_h + y_p = Ae^{-3x} + Be^{4x} - 2x^2 + x.$