Högre ordnings linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Högre ordnings konstant-koefficients ode

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Högre ordnings konstant-koefficients ode

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till $L(y) = g(x)$ är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna homogenlösningen och y_p en partikulärlösning.

Högre ordnings konstant-koefficients ode

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till $L(y) = g(x)$ är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna homogenlösningen och y_p en partikulärlösning.

Den allmänna formen på homogenlösningarna ges nedan, och en partikulärlösning kommer vi hitta via en ansats.

Homogenlösningar

Sats

Om $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (r - r_k)^{m_k}$*, där* $r_i \neq r_j$ *om* $i \neq j$*, så gäller att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ges av

$$y(x) = P_1(x)\mathrm{e}^{r_1 x} + P_2(x)\mathrm{e}^{r_2 x} + \ldots + P_k(x)\mathrm{e}^{r_k x},$$

där P_j *:a är polynom av högst grad* $(m_j - 1)$*.*

Fallet $n = 2$

Fallet $n = 2$

Om $n = 2$ finns två alternativ:

Fallet $n = 2$

Om $n = 2$ finns två alternativ:

- $p(r) = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow y_h = P_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{r_1 x}} + \mathrm{P_2(x)e^{r_2 x}} = \mathrm{Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$.

Fallet $n = 2$

Om $n = 2$ finns två alternativ:

- $p(r) = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow y_h = P_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{x}} + \mathrm{P}_2(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{x}} = \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{x}} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\mathrm{x}}$.
- $p(r) = (r - r_1)^2 \Rightarrow y_h = P_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{x}} = (\mathrm{Ax} + \mathrm{B})\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\mathrm{x}}$.

Om $r_j = c + id$ där $d \neq 0$ för något j, då finns, eftersom $p(r)$ har reella koefficienter, l sådant att $r_l = c - id$ och $m_j = m_l$. I dessa fall skriver vi homogenlösningen på reell form, och noterar att

$$P_j(x)\mathrm{e}^{\mathrm{r_j x}} + \mathrm{P_l(x)e^{r_l x}} = \mathrm{Q(x)e^{cx}}\cos(\mathrm{dx}) + \mathrm{R(x)e^{cx}}\sin(\mathrm{dx})$$

för polynom Q, R av grad högst $m_j - 1 = m_l - 1$.