Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

ges av

$$y = y_h + y_p,$$

där y_p *är* **en** *partikulärlösning, och* y_h *är* **den allmänna** *lösningen till den homogena ekvationen*

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0.$$

Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

ges av

$$y = y_h + y_p,$$

där y_p *är* **en** *partikulärlösning, och* y_h *är* **den allmänna** *lösningen till den homogena ekvationen*

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0.$$

Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Sats (Allmän homogenlösning)

Om α, β *är rötterna (som eventuellt är komplexa eller lika) till den* **karaktäristiska ekvationen:**

$$p(r) = r^2 + ar + b = 0,$$

Andra ordningens linjära ode med konstanta koefficienter

Sats (Allmän homogenlösning)

Om α, β är rötterna (som eventuellt är komplexa eller lika) till den **karaktäristiska ekvationen:**

$$p(r) = r^2 + ar + b = 0,$$

då ges y_h av:

$$y_h = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{\beta \mathrm{x}} & \alpha \neq \beta \\ (Ax + B)\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} & \alpha = \beta \end{cases}$$

Sats (Allmän homogenlösning)

Om α, β är rötterna (som eventuellt är komplexa eller lika) till den **karaktäristiska ekvationen:**

$$p(r) = r^2 + ar + b = 0,$$

då ges y_h av:

$$y_h = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{\beta \mathrm{x}} & \alpha \neq \beta \\ (Ax + B)\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}} & \alpha = \beta \end{cases}$$

En partikulärlösning y_p kommer vi hitta via en kvalificerad ansats (i de fall vi betraktar i denna kurs).

Komplexa rötter

Komplexa rötter

- om α, β är komplexa då måste det gälla att α är komplexkonjugat till β (eftersom konstanterna a, b i ekvationen är reella).

Komplexa rötter

- om α, β är komplexa då måste det gälla att α är komplexkonjugat till β (eftersom konstanterna a, b i ekvationen är reella).
- Alltså är rötterna i detta fall på formen $c \pm id$.

Komplexa rötter

- om α, β är komplexa då måste det gälla att α är komplexkonjugat till β (eftersom konstanterna a, b i ekvationen är reella).
- Alltså är rötterna i detta fall på formen $c \pm id$.
- Man kan då alternativt skriva den allmänna homogenlösningen på formen

$$y_h = A\mathrm{e}^{(\mathrm{c}+\mathrm{id})\mathrm{x}} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{(\mathrm{c}-\mathrm{id})\mathrm{x}} = \mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{cx}} \cos(\mathrm{dx}) + \mathrm{D}\mathrm{e}^{\mathrm{cx}} \sin(\mathrm{dx}),$$