Exempel

Bestäm den kontinuerliga funktion $y(x)$ som i någon omgivning till $x = 1/2$ uppfyller integralekvationen

$$y(x) + \int_x^{1/2} \frac{\sqrt{4 - y(t)^2}}{t - t^2}\, dt = 1.$$

Lösning

Lösning

Derivation av integralekvationen ger

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)+\int_x^{1/2}\frac{\sqrt{4-y(t)^2}}{t-t^2}\,dt\right)$$

Lösning

Derivation av integralekvationen ger

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)+\int_x^{1/2}\frac{\sqrt{4-y(t)^2}}{t-t^2}\,dt\right)$$
$$=y'-\frac{\sqrt{4-y^2}}{x-x^2}=\frac{d}{dx}1=0 \quad \text{(DE)}.$$

Lösning

Derivation av integralekvationen ger

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) + \int_x^{1/2} \frac{\sqrt{4 - y(t)^2}}{t - t^2}\, dt\right)$$
$$= y' - \frac{\sqrt{4 - y^2}}{x - x^2} = \frac{d}{dx}1 = 0 \quad \text{(DE)}.$$

Insättning av $x = 1/2$ i ekvationen ger

$$y(1/2) + \int_{1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{4 - y(t)^2}}{t - t^2}\, dt = y(1/2) = 1 \quad \text{(BV)}.$$

Lösning

Derivation av integralekvationen ger

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) + \int_x^{1/2} \frac{\sqrt{4-y(t)^2}}{t-t^2}\,dt\right)$$

$$= y' - \frac{\sqrt{4-y^2}}{x-x^2} = \frac{d}{dx}1 = 0 \quad \text{(DE)}.$$

Insättning av $x = 1/2$ i ekvationen ger

$$y(1/2) + \int_{1/2}^{1/2} \frac{\sqrt{4-y(t)^2}}{t-t^2}\,dt = y(1/2) = 1 \quad \text{(BV)}.$$

Integralekvationen är ekvivalent med att lösa (DE) med bivillkoret (BV).

Lösning

(DE) är separabel, och eftersom vi söker en lösning i ett intervall som innehåller $x = 1/2$ och $4 - \big(y(1/2)\big)^2 = 3 > 0$ kan vi dividera (DE) med $\sqrt{4 - y^2}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{4 - y^2}} = \frac{1}{x - x^2}.$$

Lösning

(DE) är separabel, och eftersom vi söker en lösning i ett intervall som innehåller $x = 1/2$ och $4 - \big(y(1/2)\big)^2 = 3 > 0$ kan vi dividera (DE) med $\sqrt{4 - y^2}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{4 - y^2}} = \frac{1}{x - x^2}.$$

Detta ger

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4 - y^2}} = \int \frac{dx}{x - x^2} + C,$$

om vi här låter $\int$ stå för *en* primitiv.

Lösning

Vi får nu

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin \frac{y}{2}$$

och

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$

Lösning

Vi får nu
$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin\frac{y}{2}$$
och
$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$
Eftersom $x/(1-x) > 0$ i en omgivning till $x = 1/2$ kan beloppstecknet tas bort.

Lösning

Vi får nu

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin\frac{y}{2}$$

och

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$

Eftersom $x/(1-x) > 0$ i en omgivning till $x = 1/2$ kan beloppstecknet tas bort.
Så

$$\arcsin\frac{y}{2} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C.$$

Lösning

Vi får nu

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin \frac{y}{2}$$

och

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$

Eftersom $x/(1-x) > 0$ i en omgivning till $x = 1/2$ kan beloppstecknet tas bort.

Så

$$\arcsin \frac{y}{2} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C.$$

(BV): $\arcsin(1/2) = \ln 1 + C$, d.v.s. $C = \pi/6$.

Lösning

Vi får nu

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \arcsin \frac{y}{2}$$

och

$$\int \frac{dx}{x-x^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$

Eftersom $x/(1-x) > 0$ i en omgivning till $x = 1/2$ kan beloppstecknet tas bort.

Så

$$\arcsin \frac{y}{2} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C.$$

(BV): $\arcsin(1/2) = \ln 1 + C$, d.v.s. $C = \pi/6$.

Slutligen löser vi ut y:

$$\underline{\underline{y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)}}.$$