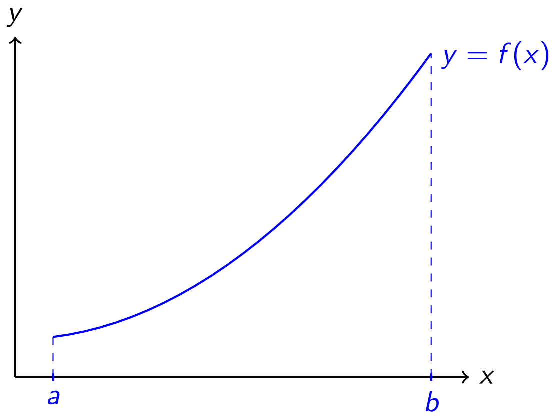
Riemannsummor

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Vill approximera $\int_a^b f(x)\,dx$.



Vill approximera $\int_a^b f(x)\,dx$.

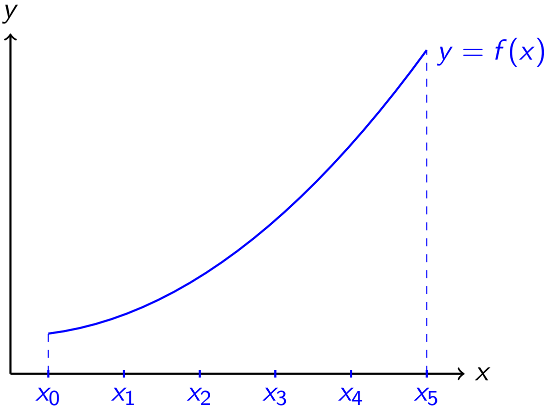
Riemannsummor

Vill approximera $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Sätt $a = x_0,\ b = x_k$ och stycka upp intervallet $[a, b]$ i k delar

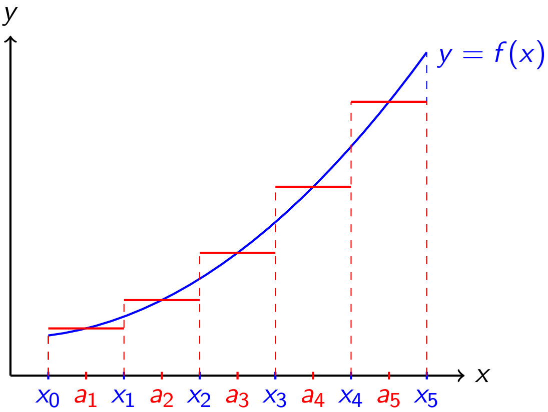
Vill approximera $\int_a^b f(x)\,dx$.

Sätt $a = x_0$, $b = x_k$ och stycka upp intervallet $[a, b]$ i k delar ($k = 5$ i figuren)



Välj sedan punkter a_i på de olika delintervallen $[x_{i-1}, x_i]$.

Välj sedan punkter a_i på de olika delintervallen $[x_{i-1}, x_i]$.



Nu gäller att $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1})$.

Riemannsummor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Om $|f(u) - f(v)| \leq \delta$ för alla $u, v \in [x_{i-1}, x_i]$ för varje i, d.v.s. skillnaden mellan största och minsta värde för $f(x)$ på varje intervall $[x_{i-1}, x_i]$ är som högst δ, är felet i denna uppskattning mindre än

$$\delta \cdot (b - a).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Om $|f(u) - f(v)| \leq \delta$ för alla $u, v \in [x_{i-1}, x_i]$ för varje i, d.v.s. skillnaden mellan största och minsta värde för $f(x)$ på varje intervall $[x_{i-1}, x_i]$ är som högst δ, är felet i denna uppskattning mindre än

$$\delta \cdot (b - a).$$

Speciellt om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ ser vi att vi genom att välja den maximala längden på intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ tillräckligt små så kan vi få uppskattningen godtyckligt nära integralens värde.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Om $|f(u) - f(v)| \leq \delta$ för alla $u, v \in [x_{i-1}, x_i]$ för varje i, d.v.s. skillnaden mellan största och minsta värde för $f(x)$ på varje intervall $[x_{i-1}, x_i]$ är som högst δ, är felet i denna uppskattning mindre än

$$\delta \cdot (b - a).$$

Speciellt om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ ser vi att vi genom att välja den maximala längden på intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ tillräckligt små så kan vi få uppskattningen godtyckligt nära integralens värde. (Det visar sig dock att detta är sant för alla Riemannintegrabla funktioner.)

Definition

Om $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$ och $x_{i-1} \leq a_i \leq x_i$ för alla $i = 1, 2, \ldots, k$, då kallas $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1})$ för en Riemannsumma till integralen $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Om vi låter $A = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ då skulle vi informellt kunna skriva summan

$$\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_A f(x)\Delta x,$$

där vi menar att för $x = a_i$ är $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Om vi låter $A = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ då skulle vi informellt kunna skriva summan

$$\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_A f(x)\Delta x,$$

där vi menar att för $x = a_i$ är $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.
När vi låter maximala längden på intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ gå mot noll "övergår" mängden A till hela intervallet $[a, b]$ och $f(x)\Delta x$ "övergår" till $f(x)dx$, där dx är "infinitesmalt" litet, så att man kan tänka på $\int_a^b f(x)dx$ som en slags summering över $x \in [a, b]$ av de infinitesmalt tunna stolparna med höjd $f(x)$ och tjocklek dx.

Riemannsummor

Om vi låter $A = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ då skulle vi informellt kunna skriva summan

$$\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{A} f(x)\Delta x,$$

där vi menar att för $x = a_i$ är $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.
När vi låter maximala längden på intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ gå mot noll "övergår" mängden A till hela intervallet $[a, b]$ och $f(x)\Delta x$ "övergår" till $f(x)dx$, där dx är "infinitesmalt" litet, så att man kan tänka på $\int_a^b f(x)dx$ som en slags summering över $x \in [a, b]$ av de infinitesmalt tunna stolparna med höjd $f(x)$ och tjocklek dx.
Eftersom $[a, b]$ inte är uppräkneligt är det förstås inte en summa (ens i den mening vi har för oändliga serier), utan ska tolkas som ett gränsvärde av Riemannsummorna.

Riemannsummor

Sats

Antag att $f(x)$ är Riemannintegrabel på $[a, b]$. Givet $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

för alla indelningar $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$ sådana att $x_i - x_{i-1} \leq \delta$ för alla $i = 1, 2, \ldots k$, och alla val av punkter $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Sats

Antag att $f(x)$ är Riemannintegrabel på $[a,b]$. Givet $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

för alla indelningar $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_k = b$ sådana att $x_i - x_{i-1} \leq \delta$ för alla $i = 1, 2, \ldots k$, och alla val av punkter $a_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

D.v.s. informellt uttryckt, uppskattningen av integralen med en Riemannsumma kan göras godtyckligt bra bara genom att välja längderna på intervallen i uppstyckningen tillräckligt små.