

1.3.1 a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \left/ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right/ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \underbrace{\rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}_{\text{Begränsad}} = \underline{\underline{0}}.$$

SVAR: 0

b)

$$\frac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2} = f(x, y)$$

Om vi går längs kurvan $x=0$ mot origo får vi

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^2}{y^2} = -2.$$

Om vi går längs kurvan $y=0$ mot origo får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet

SVAR: Existerar ej

c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2y^3}{2x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi - 2\sin^3 \varphi)}{\rho^2 (2\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \left(\frac{\cos^3 \varphi - 2\sin^3 \varphi}{2\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \right) = 0$$

eftersom $1 + \cos^2 \varphi \geq 1$ så är $\frac{\cos^3 \varphi - 2\sin^3 \varphi}{2\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$ begränsad.

SVAR: 0

d) (Se även nästa sida för alternativ lösning.)

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y - x^2}$$

Längs $y=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1.$

Längs $y=2x^2$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2 - x^2} = 1.$

(OBS! $y=2x^2$, $x \neq 0$ ligger i D_f).

SVAR: Existerar ej.

3.1 d igen: I ett fall som detta när man ska visa att ett gränsvärde inte existerar räcker det att på ett eller annat sätt hitta två kurvor som leder till en motsägelse för att vi får olika gränsvärden längs dessa. Ovan tog vi x-axeln och kurvan $y=2x^2$. Båda dessa går genom origo då x går mot 0, och det är förstås centralt att ha kurvor som "slutar" i den punkt vi ska ta gränsvärdet mot (så det hade t.ex. inte funkat att ta $y=1+2x^2$ e.d. här).

Det hade dock funkat även här, och kanske t.o.m. är något enklare, att bara gå längs med axlarna:

$$f(x,0)=x^2/(-x^2)=-1 \text{ (som går mot } -1 \text{ då } x \text{ går mot } 0)$$

$$f(0,y)=0/(y-0)=0 \text{ (som går mot } 0 \text{ då } y \text{ går mot } 0).$$

Eftersom vi fick olika värden existerar alltså inte gränsvärdet.

3.2 a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1,$$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

SVAR: 1

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y+1}{\ln(x^2+2y^2)}$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

after on $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t}{\ln t} = -\infty$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y+1}{\ln(x^2+2y^2)} = 0$

after on $x+y+1 \rightarrow 1$ or $\ln(x^2+2y^2) \rightarrow -\infty$.

SVAR: 0

3.3 a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{x^2 + 2y^2 - 2x + 1} = \text{ / } x = 1+t \text{ / } =$$

$$= \lim_{(t,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+t)y - y}{(1+t)^2 + 2y^2 - 2(1+t) + 1} =$$

$$= \lim_{(t,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ty}{t^2 + 2t + 1 + 2y^2 - 2 - 2t + 1} =$$

$$= \lim_{(t,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ty}{t^2 + 2y^2} = \text{ / } t = p \cos \varphi \text{ / } y = p \sin \varphi \text{ / } =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 \cos \varphi \sin \varphi}{p^2 (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}.$$

Bevor $p \rightarrow 0$: $\varphi = 0$ ger $\frac{\cos 0 \sin 0}{1 + \sin^2 0} = 0$,

$\varphi = \pi/4$ ger $\frac{\cos \pi/4 \cdot \sin \pi/4}{1 + \sin^2 \pi/4} = \frac{1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}$.

SVAR: Existerar ej.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Alt: Längs } y=0: \lim_{x \rightarrow 1} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{x^2 - 2x + 1} = 0 \\ \text{Längs } y=x-1: \lim_{x \rightarrow 1} f(x,x-1) = \frac{x(x-1) - (x-1)}{x^2 + 2(x-1)^2 - 2x + 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2} = \frac{1}{3}. \end{array} \right)$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy^2 - y^2}{x^2 + 2y^2 - 2x + 1} = \lim_{(t,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+t)y^2 - y^2}{(1+t)^2 + 2y^2 - 2(1+t) + 1} =$$

$$= \lim_{(t,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ty^2}{t^2 + 2y^2} = \text{ / } t = p \cos \varphi \text{ / } y = p \sin \varphi \text{ / } =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{p^2 (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \right) = 0$$

beg

SVAR: 0.

3.4 a)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \quad \left/ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{array} \right/$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r (\cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)}_{\text{beg.}} = 0$$

SVAR: 0

b)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r^3 \cos \varphi \sin \theta \cos^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} 3r \frac{\cos \varphi \sin \theta \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta} = 0$$

(eftersom $1 + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \geq 1$.)

c)

$$f(x,y,z) = \frac{x+2y-z}{3x^2+y^2+z^2}$$

Längs kurva $y=z=0$, $x>0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,0,0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{3x^2} = +\infty$$

Längs kurva $y=z=0$, $x<0$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x,0,0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{3x^2} = -\infty$$

SVAR: Existerar ej.

1.3.5

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + x}$

Kontrollera om

effektiva

och $x, y \rightarrow \infty$

SVAR:

1)

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x} = \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(Vi använder att $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho} \rightarrow 0$ då $\rho \rightarrow \infty$)

SVAR: 1.

c)

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+x} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho \cos \varphi}$$

eftersom $\frac{\rho^2}{\rho^2 + \rho \cos \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\cos \varphi}{\rho}}$,

och $\frac{\cos \varphi}{\rho} \rightarrow 0$ då $\rho \rightarrow \infty$.

SVAR: 1

1.3.6)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0 \neq f(0,0) = 1.$$

Så inte kontinuerlig i $(0,0)$

Kontinuerlig alla andra punkter

(för att visa det.

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} ((a+h)^2 + (b+k)^2) =$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (a^2 + 2ah + h^2 + b^2 + 2bk + k^2) = a^2 + b^2 = f(a,b)$$

om $(a,b) \neq (0,0)$.

Om vi definierar $f(0,0) = 0$ istället så blir

f kontinuerlig överallt.

13.7) Frågan är helt enkelt om

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existerar.

Om det gör det blir f kontinuerlig

om vi definierar

$$f(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{t=x^2+y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

SVAR: Ja, $f(0,0) = 1$.

$$b) f(x,y) = \frac{(2x+y)^2}{x^2+3y^2+2xy}$$

$$\text{Längs } x=0: \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Längs } y=-2x: \lim_{x \rightarrow 0} f(x,-2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^2}{x^2+3(-2x)^2+2x(-2x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^2}{9x^2} = 0.$$

SVAR: Nej.

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{6x^2+3y^2+x^2y^2}{2x^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{3(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2} + \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2} \right) =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(3 + \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2} \right) =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\rho^4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{\rho^2 (2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \right) =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(3 + \rho^2 \underbrace{\left(\frac{\cos^2 \phi \sin^2 \phi}{2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \right)}_{\text{beg}} \right) = 3.$$

SVAR: JA, $f(0,0) = 3$.

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} =$

$\frac{0}{1} = 0$

SVAR: JA.

$f(0,0) = 0$.

1.3.8 a)

$$|x^2 + (y-2)| \leq |x^2| + |y-2| \leq |x^2 + (y-2)^2| + \sqrt{(y-2)^2 + x^2} \\ = p^2 + p = g(p)$$

b)

$$|\sin(x-y)| \leq |x-y| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p = g(p)$$

c)

$$\left| x + \frac{2}{y} - 2 \right| \leq |x-1| + \left| \frac{2}{y} - 1 \right| = |x-1| + \left| \frac{2-y}{y} \right|$$

$$\leq |0 \text{ m } y \geq 1| \leq |x-1| + |y-2|$$

$$\leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2p = g(p).$$

1.3.9 a)

$$y = kx \text{ ger, d\u00e4 } f(x, y) = \frac{y^4}{y^4 + (y-x^2)^2}, \quad k \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \frac{k^4 x^4}{k^4 x^4 + (kx - x^2)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^4 x^4}{k^2 x^2 + (k^2 + 1)x^4 - 2kx^3} = 0.$$

L\u00e4ngs $y=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{(-x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

L\u00e4ngs $x=0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^2} = 0.$$

b)

L\u00e4ngs $y=x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^8} = 1 \neq 0.$$

3.10)

a) $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^4}{2x^2 + y^2 + 3z^2} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$

Längs $x=y=0$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(0,0,z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{3z^2} = 0.$$

Längs $y=z=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

SVAR: NEJ.

b) $f(x,y,z) = \frac{xyz + yz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 1} \quad (x,y,z) \neq (-1,0,0)$

$$= \frac{(x+1)yz}{(x+1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(t,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(-1+t,y,z) =$$

$$= \lim_{(t,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{tyz}{t^2 + y^2 + z^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta}_{\text{beg.}} = 0.$$

SVAR: JA, $f(-1,0,0) = 0$.