

TATB09 Flervariabelanalys

Problemsamling

2025

© Matematiska institutionen vid Linköpings universitet

1 Lektion 1: Delmängder till $\mathbf{R}^n$

1.1 Rita följande mängder i $\mathbf{R}^2$, och beskriv deras inre punkter, yttre punkter och randpunkter:
 (a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2, 0 < x < y\}$

1.2 Beskriv de mängder i xy -planet som ges av (a) $|x| + |y| < 1$ (b) $\max(|x|, |y|) \leq 1$

1.3 Rita de mängder i $\mathbf{R}^2$ som ges av (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$ (b) $|x + 2y| = 2$
 Bestäm inre punkter och randpunkter.

1.4 Avgör vilka av mängderna i övningarna 1.1, 1.2 och 1.3 som är öppna, slutna, begränsade.

1.5 Beskriv den mängd i $\mathbf{R}^2$ som (a) bestäms av olikheterna $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \leq y \leq 2x$
 (b) är begränsad och avgränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 - y^2 = 4$, $xy = 1$ och $xy = 2$

1.6 Beskriv den mängd i $\mathbf{R}^3$ som ges av
 (a) $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ och $z \geq 0$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$ och $z \geq 0$
 (c) $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ (d) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $x + y + z = 1$.

1.7 Beskriv skärningen mellan de två mängderna i $\mathbf{R}^2$ som definieras av $x^2 + y^2 - 6y + 4 \leq 0$ och $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 \leq 0$.

Extrauppgifter:

1.8 Rita mängden M och bestäm inre punkter och randpunkter för M då
 (a) $M = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\}$ (b) $M = \{x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0\}$ (c) $M = \{x \in \mathbf{R} : 2x > x^2 + 1\}$
 (d) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1\}$ (e) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, y = 0\}$

1.9 Avgör vilka mängder i övning 1.8 som är öppna, slutna, begränsade.

1.10 Har nedanstående båda mängder i $\mathbf{R}^3$ någon gemensam punkt?
 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z \leq 0\}, \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 \leq 0\}$

2 Lektion 2: Funktioner

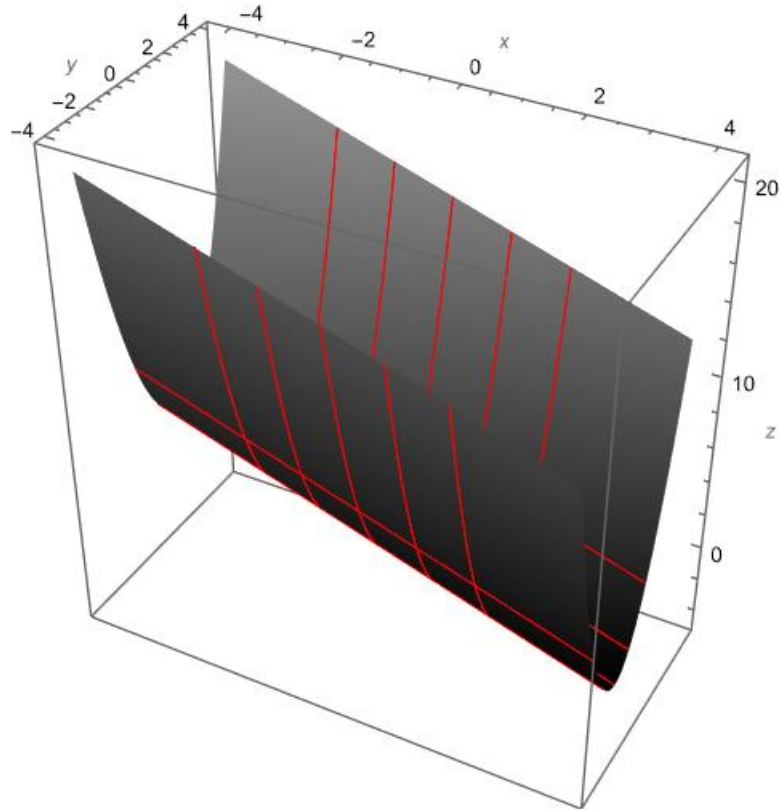
2.1 Betrakta funktionen $z = f(x, y) = -x + y^2$.

(a) Fyll i funktionsvärdena i följande värdetabell

$\begin{array}{c} \text{y} \\ \text{x} \end{array}$	-2	-1	0	1	2
-2					
-1					
0					
1					
2					

(b) Rita upp kurvorna $z = f(-1, y)$ i yz -planet respektive $z = f(x, 2)$ i xz -planet.

(c) Betrakta funktionsgrafen $z = f(x, y) = -x + y^2$ nedan. Kan du identifiera vilka kurvor som är utritade på grafen? Hur förhåller sig punkterna i värdetabellen ovan till dessa kurvor.



2.2 Beskriv funktionsytorna med ekvation $z = f(x, y)$ och tolka geometriskt om $f(x, y)$ är

- (a) $x + 2y - 2$ (b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $x^2 + y^2$ (d) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2.3 Bestäm definitions- och värdemängden till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 - 2$.

2.4 Rita nivåkurvorna med ekvation $f(x, y) = C$ för $C = -2, -1, 0, 1, 2$ om $f(x, y)$ ges av

- (a) $x + 2y - 2$ (b) $x^2 + y^2 - 2x$ (c) xy (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, där $a > 0, b > 0$

Försök att beskriva funktionsytorna utgående från nivåkurvorna.

2.5 (a) Uttryck punkten $(2, 2)$ i polära koordinater.

(b) Skissa området som i polära koordinater ges av $\rho \leq 3, -3\pi/4 \leq \varphi \leq -\pi/2$ i xy -planet.

(c) Skriv om uttrycket till polära koordinater:

$$\frac{x^3 + x^2y}{x^2 + y^2}.$$

2.6 (a) Uttryck punkten $(1, 1, 0)$ i sfäriska koordinater.

(b) Skriv om uttrycket till sfäriska koordinater

$$\frac{z^3}{x^2 + y^2}.$$

Extrauppgifter:

2.7 Bestäm definitions- och värdemängden till funktionen $f(x, y, z) = (\ln(xz + 1))^2 + (\sqrt{y})^{-1}$.

3 Lektion 3: Gränsvärden och kontinuitet.

3.1 Undersök $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ då $f(x,y)$ är

(a) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ (b) $\frac{x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2}$ (c) $\frac{x^3 - 2y^3}{2x^2 + y^2}$ (d) $\frac{x^2}{y - x^2}$

3.2 Beräkna (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y + 1}{\ln(x^2 + 2y^2)}$

3.3 Undersök följande gränsvärden:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{x^2 + 2y^2 - 2x + 1}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy^2 - y^2}{x^2 + 2y^2 - 2x + 1}$

3.4 Undersök $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$ då $f(x,y,z)$ är

(a) $\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ (b) $\frac{3xz^2}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ (c) $\frac{x + 2y - z}{3x^2 + y^2 + z^2}$

3.5 Beräkna

$$\lim_{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + x + y^2}.$$

3.6 I vilka punkter är

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{då } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

kontinuerlig? Kan man ändra värdet av f i eventuella diskontinuitetspunkter så att f blir kontinuerlig överallt?

3.7 Kan man definiera $f(0,0)$ så att f blir kontinuerlig i origo ifall $f(x,y)$ utanför origo är

(a) $\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $\frac{(2x + y)^2}{x^2 + 3y^2 + 2xy}$ (c) $\frac{6x^2 + 3y^2 + x^2y^2}{2x^2 + y^2}$

Extrauppgifter:

3.8 (a) Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} (x^2 + y) = 2$ genom att hitta en funktion g definierad nära 0 sådan att

$$|(x^2 + y) - 2| \leq g(\rho), \text{ där } \rho = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} \text{ och } \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0.$$

Visa på motsvarande sätt att (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(x - y) = 0$ (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x + \frac{2}{y}) = 2$.

3.9 Antag att $f(x,y) = \frac{y^4}{y^4 + (y - x^2)^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$. Visa att

- (a) $f(x,y) \rightarrow 0$ då $(x,y) \rightarrow (0,0)$ längs varje rät linje genom $(0,0)$
 (b) $f(x,y)$ ändå inte har något gränsvärde då $(x,y) \rightarrow (0,0)$

3.10 Kan man definiera f i undantagspunkten så att f blir kontinuerlig där ifall

(a) $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^3 + z^4}{2x^2 + y^2 + 3z^2}$ för $(x,y,z) \neq (0,0,0)$
 (b) $f(x,y,z) = \frac{xyz + yz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 1}$ för $(x,y,z) \neq (-1,0,0)$

4 Lektion 4: Differentierbarhet. Partiella derivator.

4.1 Räkna ut f'_x och f'_y då $f(x, y)$ ges av

(a) $x + x^3y + x^2y^3 + y^5$ (b) $\ln(1 - x^2 - 2y^2)$ (c) $\frac{x+y}{x-y}$

4.2 Bestäm de partiella förstaderivatorna av f om $f(x, y, z)$ är

(a) $x^2y^3z^4$ (b) $\cos(xy - z^2)$ (c) $\frac{1}{\sqrt{z}} \arctan \frac{y}{x}$

4.3 Beräkna f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yx} och f''_{yy} för f i övning 4.1a.

4.4 Lös följande system av partiella differentialekvationer i $\mathbf{R}^2$:

(a) $\begin{cases} z'_x = 2x + y \\ z'_y = x + 2y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z'_x = e^{xy} \\ z'_y = e^{xy} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z'_x = ye^x \\ z'_y = 1 + e^x \end{cases}$

4.5 Bestäm alla funktioner $u : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ sådana att

(a) $\begin{cases} u'_x = y + 3z - 3 \\ u'_y = x + 2z - 2 \\ u'_z = 2y + 3x - 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u'_x = 1 + y \sin xy \\ u'_y = e^z + x \sin xy \\ u'_z = (1 + y + z)e^z \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u'_x = z + xy^2 \\ u'_y = x^2y \\ u'_z = yz \end{cases}$

4.6 Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ till följande partiella differentialekvationer:

(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (b) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
 (d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ (e) $\frac{\partial z}{\partial x} = z$ (f) $\frac{\partial z}{\partial x} = yz$

4.7 Bestäm ekvationer för tangentplanen till ytorna med följande ekvationer och angivna tangeringspunkter:

(a) $z = x^3 + xy^2$ i $(1, 2, 5)$ (b) $z = e^{2x} - 1$ i $(0, 2, 0)$ (c) $y = \arcsin xz$ i $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

4.8 Effektutvecklingen P i ett motstånd med resistansen R ges som alla vet av

$$P = \frac{U^2}{R},$$

där U är spänningen över motståndet. Antag att $U = 10$ V och $R = 2 \Omega$; vad är P då? $P = P(U, R)$ som funktion av U, R uppfyller nu (i de punkter där P är differentierbar) att

$$P(U + \Delta U, R + \Delta R) - P(U, R) \approx P'_U(U, R)\Delta U + P'_R(U, R)\Delta R$$

om ΔU och ΔR är små. Baserat på denna uppskattning, ungefär hur mycket ändras P om U ökas med 0,3 V och R ökas med (a) 0,1 Ω (b) 0,2 Ω ?

4.9 Visa direkt från definitionen av differentierbarhet att funktionen f , där $f(x, y) = xy$, är differentierbar i $(1, 2)$.

Extrauppgifter:

4.10 Vi vet att

$$f \in \mathcal{C}^1 \implies f \text{ är differentierbar} \implies f \text{ är kontinuerlig och partiellt deriverbar.}$$

Vi ska här se att implikationerna ovan inte är ekvivalenser.

(a) Beräkna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ i alla punkter i planet om $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Visa också att f är kontinuerlig, men inte differentierbar i $(0, 0)$ (så speciellt inte $\mathcal{C}^1$).

(b) Antag att

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Visa att $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar överallt, men att f ändå inte är kontinuerlig i $(0, 0)$.

(c) Visa att f , där $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \frac{x}{y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ är differentierbar men inte $\mathcal{C}^1$.

4.11 Visa att det inte finns någon funktion $z \in \mathcal{C}^2$ sådan att $z'_x = y e^{x^2 y^4}$ och $z'_y = x e^{x^2 y^4}$.

5 Lektion 5: Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer.

5.1 Betrakta differentialekvationen $z'_x + z'_y = 0$.

- (a) Visa att $z = \sin(x - y)$ och $z = 1 + (x - y)e^{-x}e^y$ båda är lösningar till denna ekvation.
- (b) Allmänt, om $z(x, y) = f(x - y)$ där f är en deriverbar funktion av en variabel, beräkna $z'_x(x, y)$ och $z'_y(x, y)$, och visa sedan att z är en lösning till differentialekvationen.
- (c) Funktionerna i (a) är båda av typen i (b); vad är f i dessa fall?

5.2 Låt f vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion av en variabel och sätt $z(x, y) = f(x/y)$. Beräkna z'_x och z'_y , och visa att $xz'_x + yz'_y = 0$. Slutligen, kan $z(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ skrivas som $f(x/y)$ för något f ?

5.3 Antag att $z \in \mathcal{C}^1$. Uttryck z'_x och z'_y med hjälp av z'_u och z'_v (och eventuellt x och y) om

(a) $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u = 2xy \\ v = 1/y \end{cases}$

5.4 (a) Transformera differentialekvationen i övning 5.1 till nya variabler $\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + y, \end{cases}$ och finn sedan alla lösningar till ekvationen.

(b) Om man dessutom vet att $z(0, y) = y - \cos y$ för alla y , hur ser lösningen ut då?

5.5 Betrakta det linjära variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ som ges av $\begin{cases} u = 2x - 3y, \\ v = x. \end{cases}$

(a) Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial x}{\partial u}$. Är det sant att $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = 1$?

(b) Låt $f \in \mathcal{C}^1$. Uttryck $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hjälp av $\frac{\partial f}{\partial u}$ och $\frac{\partial f}{\partial v}$. Hur kan $\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial v}$ trots att $x = v$?

5.6 Bestäm alla z som är av klass $\mathcal{C}^1$ i första kvadranten och som där uppfyller

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = y + xy$$

genom att införa nya variabler $u = xy^2$ och $v = y$. Bestäm sedan den lösning som uppfyller $z(1, y) = e^{-y}$ för $y > 0$.

5.7 Om $z \in \mathcal{C}^2$ beror på u och v , som i sin tur beror på x , uttryck $\frac{dz}{dx}$ och $\frac{d^2 z}{dx^2}$ med hjälp av u - och v -derivator av z (och eventuellt variabeln x) om $\begin{cases} u = \ln x, \\ v = x^2. \end{cases}$

5.8 Betrakta för $z \in \mathcal{C}^2$ differentialekvationen

$$z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = 6y.$$

- (a) Transformerar och lös ekvationen med hjälp av variabelbytet $u = 2x + y$, $v = x$.
- (b) Om man har randvillkoret $z(0, y) = e^{-y^2}$, hur ser lösningarna ut då?
- (c) Om man har randvillkoren $z(0, y) = e^{-y^2}$ och $z'_x(0, y) = 0$, bestäm z .
- (d) Om man har randvillkoren $z(0, y) = 0$ och $z'_x(x, -8x) = 0$, bestäm z .

Extrauppgifter:

5.9 Transformerar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ till de nya variablerna i övning 5.3a, om $z \in \mathcal{C}^2$.

5.10 Bestäm alla $\mathcal{C}^2$ -funktioner $z(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad x > 0, y > 0,$$

genom att gå över till de nya variablerna i övning 5.3c.

5.11 För $\mathcal{C}^2$ -funktioner z gäller som bekant att de blandade andraderivatorna är lika: $z''_{xy} = z''_{yx}$. Efter ett variabelbyte $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ gäller det också: $z''_{uv} = z''_{vu}$. Däremot behöver det inte gälla om man blandar variabler från *olika* system, vilket vi här skall se. Visa att

$$(z'_x)'_u \neq (z'_u)'_x$$

i det konkreta fallet att variabelbytet ges av $u = xy$, $v = x/y$ då $x > 0$ och $y > 0$, och att funktionen z ges av $z = xy = u$.

6 Lektion 6: Riktningsderivator. Gradienter. Geometriska tillämpningar

6.1 Beräkna gradienten av f om (a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ (b) $f(x, y) = xy^2 e^{-xy}$

6.2 Låt $f(x, y) = x^2 + 4y$.

- (a) Rita nivåkurvorna $f(x, y) = C$ för $C = -16, 0, 16, 32$ i en stor figur. Det räcker om du tar med de delar av kurvorna som ligger i rektangeln $-2 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$.
- (b) Rita skalenliga vektorer $\nabla f(a, b)$ med fotpunkter i $(a, b) = (0, 8), (2, 3), (4, -4), (6, -5), (8, -8)$; notera att dessa punkter ligger på nivåkurvorna i (a).
- (c) Hur ligger vektorerna $\nabla f(a, b)$ i (b) i förhållande till de nivåkurvor $f(x, y) = C$ som går genom (a, b) ? Åt vilket håll pekar $\nabla f(a, b)$? Kan man se en koppling mellan längderna av $\nabla f(a, b)$ och hur tätt nivåkurvorna ligger i närheten av (a, b) ?

6.3 Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen i punkten $(2, -1)$ till den kurva som ges av ekvationen $x^3 + xy + y^3 = 5$.

6.4 Bestäm ekvationer för alla linjer som tangerar ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 1$ och som går genom punkten (a) $(0, 2)$ (b) $(0, 0)$ (c) $(-1, 0)$

6.5 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $x^2 - y^2 = 3$ och $xy = 2$ och bestäm vinklarna mellan kurvorna (d.v.s. vinklarna mellan deras tangentlinjer) i dessa punkter.

6.6 Bestäm en ekvation för tangentplanet till

- (a) ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20$ i punkten $(3, -2, -1)$
- (b) ytan $z = x^2 y$ i punkten $(-2, 1, 4)$

- 6.7** Låt ytan S beskrivas av $z = f(x, y)$, där $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Ytan kan också beskrivas av sambandet $F(x, y, z) = 0$, där $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.
- (a) Beräkna och ge en tolkning av $\nabla f(x, y)$.
- (b) Beräkna och ge en tolkning av $\nabla F(x, y, z)$ i de punkter där $F(x, y, z) = 0$.
- 6.8** Räkna ut riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$ i punkten $(2, 1)$ och i den riktning som ges av vektorn (a) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (b) $(1, 2)$
- 6.9** Med vilken hastighet växer eller avtar xy^2z^3 i punkten $(3, 2, 1)$ i riktning mot origo?
- 6.10** I vilka punkter på kurvan $xy^2 = 2$ går normallinjen till kurvan genom origo?
- 6.11** Bestäm alla punkter på ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 1$ i vilka ytans tangentplan är parallellt med planet $x - y + 2z = 0$.
- 6.12** Bestäm ekvationer för alla plan som tangerar ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ och som innehåller punkterna $(6, 0, 0)$ och $(0, 3, 0)$.

Extrauppgifter:

- 6.13** En överhettad isbjörn befinner sig på ett stort plant isflak utanför Kvitøya i Svalbard. Lufttemperaturen T [$^{\circ}\text{C}$] beror på x och y [km] enligt den något märkliga formeln

$$T(x, y) = 3 \arctan(x^2 + y) - 10 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}.$$

Björnen befinner sig i punkten $(1, -2)$ och lufsar med hastigheten 3 m/s. I vilken riktning bör den lufsa för snabbast möjliga avkylning, och hur snabbt sjunker temperaturen i denna punkt och i denna riktning? Svara dels i $^{\circ}\text{C}/\text{km}$, dels i $^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

- 6.14** Bestäm konstanten C så att ytan $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C$ tangerar planet genom punkterna $(0, 1, 2)$, $(1, 3, 0)$ och $(5, -1, 1)$.

7 Lektion 7: Inversa och implicita funktioner

- 7.1** Låt

$$\begin{cases} x = 3t \cos \psi, \\ y = 2t \sin \psi. \end{cases}$$

Bestäm funktionalmatrisen $\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \psi)}$ och funktionaldeterminanten $\frac{d(x, y)}{d(t, \psi)}$.

- 7.2** Vad är funktionalmatrisen och -determinanten för den linjära avbildning $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ som ges av

$$\begin{cases} u = x + y + 2z, \\ v = 3x - 2y + z, \\ w = 5z - x - y. \end{cases}$$

Är avbildningen inverterbar?

- 7.3** Visa att ekvationen

$$x^3 + y^3 + xy = x + y$$

i någon omgivning till (a) $(0, 0)$ (b) $(0, 1)$ (c) $(0, -1)$ definierar en C^1 -funktion $y(x)$. Räkna också ut $y'(x)$ uttryckt i x och y , och speciellt $y(0)$ och $y'(0)$.

- 7.4** Betrakta ekvationen

$$x^3 = 1 + 3xy^2.$$

- (a) Visa att ekvationen i någon omgivning till $(1, 0)$ definierar en C^1 -funktion $x(y)$, och beräkna $x'(y)$ uttryckt i y och $x(y)$, samt $x(0)$ och $x'(0)$. (Eftersom funktionen $x^3 - 3xy^2$ är C^{∞} blir $x(y)$ också det.)

- (b) Beräkna $x''(y)$, uttryckt i y , $x(y)$ och $x'(y)$, och ange speciellt $x''(0)$. Har $x(y)$ lokalt extremvärde i $y = 0$?
- (c) Bestäm alla punkter som uppfyller ekvationen men kring vilka ekvationen inte lokalt definierar $\mathcal{C}^1$ -funktioner $x(y)$. Definierar ekvationen lokalt $\mathcal{C}^1$ -funktioner $y(x)$ där?

7.5 Visa att ekvationen

$$xy - (x + y)z^2 + 1 = \tan 2z$$

i någon omgivning till $(1, -1, \pi)$ definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $z(x, y)$. Räkna ut $z'_x(x, y)$ och $z'_y(x, y)$ och ange speciellt $z(1, -1)$, $z'_x(1, -1)$ och $z'_y(1, -1)$.

7.6 Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xyz = 6, \end{cases}$$

i en omgivning till punkten $(1, 2, 3)$ definierar $\mathcal{C}^1$ -funktioner $x(y)$ och $z(y)$. Bestäm $x(2)$ och $z(2)$. Räkna också ut $x'(y)$ och $z'(y)$, och speciellt $x'(2)$ och $z'(2)$.

7.7 Visa att den del av skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 - z^2 = 2$ och $x + y = 2e^z$ som ligger i ett tillräckligt litet klot med mittpunkt i $(1, 1, 0)$ är en $\mathcal{C}^1$ -kurva som kan parametreras med x som parameter. Bestäm också en tangentvektor till kurvan i denna punkt.

Extrauppgifter:

7.8 Låt e vara en konstant, $0 \leq e < 1$, och betrakta ekvationen

$$t = v - e \sin v.$$

Visa att ekvationen definierar en strängt växande $\mathcal{C}^1$ -funktion $v(t)$ med $D_v = V_v = \mathbf{R}$. (Ekvationen kallas *Keplers ekvation* och är central vid beräkning av planetpositioner; e är den elliptiska planetbanans excentricitet.)

7.9 Visa att ekvationen

$$(y^2 + z^4)x + x^5 = 1$$

definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $x(y, z)$ i hela yz -planet. Räkna också ut $x'_y(y, z)$ och $x'_z(y, z)$.

9 Lektion 9: Dubbelintegraler

Om inget annat sägs i uppgifterna avser de exakt beräkning av angiven integral.

9.1 Vi vill få en uppfattning om storleken på integralen

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{3 + x^2 - y},$$

där D är kvadraten $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

- (a) Visa med enkla under- och överskattningar att $\frac{4}{7} \leq I \leq 4$.
- (b) Vilken uppskattning av I får man om man delar upp D i fyra lika stora kvadrater?

9.2 (a) $\iint_D (x + y)^2 dxdy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

(b) $\iint_D \frac{dxdy}{1 + x + y}$, där D är rektangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ och $(0, 2)$

9.3 Låt D vara triangeln i xy -planet som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 2x \leq 4$. Skriv integralen

$$\iint_D (xy + y^2) dx dy$$

dels som $\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (xy + y^2) dy \right) dx$, dels som $\int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} (xy + y^2) dx \right) dy$, och räkna sedan ut den på valfritt sätt.

9.4 (a) $\iint_D (x - y)e^{x+y} dx dy$, där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(0, 2)$ och $(2, 2)$

(b) $\iint_D (2 + x + y) dx dy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \geq -2, x \leq 0, y \leq 0\}$

(c) $\iint_D e^{x^2} dx dy$, där D begränsas av sträckorna mellan $(0, 0)$, $(-1, 0)$ och $(-1, 1)$

(d) $\iint_D \frac{x^3}{1 + y^5} dx dy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$

(e) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + 2x}$, där D är triangeln med hörnpunkterna $(2, 0)$, $(2, 2)$ och $(4, 0)$

(f) $\iint_D \frac{x + 2xy}{1 + y^2} dx dy$, där D ges av olikheterna $0 \leq x \leq y \leq 1$

9.5 (a) $\iint_D x^3 y dx dy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 \leq y \leq 3, x \geq 0\}$

(b) $\iint_D x \cos \sqrt{y} dx dy$, där D ges av dubbelolikheten $\sqrt{y} \leq x \leq 2$

(c) $\iint_D xy dx dy$, där D är den del av enhetscirkelskivan som ligger i fjärde kvadranten

9.6 Låt D vara kvadraten med sidlängd 1 och två av hörnen i $(0, 0)$ och $(1, 1)$. Beräkna

(a) $\iint_D |x - y| dx dy$ (b) $\iint_D \max(x^2, y) dx dy$

Extrauppgifter:

9.7 (a) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^8}} \right) dx$ (b) $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y dx}{(4 - x^2 - y^2)^{3/2}} \right) dy$

9.8 Beräkna $\iint_D xy dx dy$, där D är den begränsade mängd i $\mathbf{R}^2$ som avgränsas av parabeln $y^2 = 4ax$ och linjen $y = 2x - 4a$ med en konstant $a > 0$.

10 Lektion 10: Variabelbyten i dubbelintegraler

Om inget annat sägs i uppgifterna avser de exakt beräkning av angiven integral.

10.1 (a) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, där D är cirkelskivan med centrum i origo och radie 2

(b) $\iint_D \frac{x dx dy}{1 + (x^2 + y^2)^{3/2}}$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0\}$

(c) $\iint_D (x + 2y) dx dy$, där D bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $x + 2y \geq 0$

(d) $\iint_D |x + y| dx dy$, där D är enhetsskivan

- 10.2** (a) $\iint_D (x+2y) \cos(2x+y) dx dy$, där D ges av $0 \leq x+2y \leq 1$ och $-1 \leq 2x+y \leq 1$
- (b) $\iint_D (x+2y) \exp(x-2y) dx dy$, där D är romben med hörn $(0,0)$, $(2,1)$, $(4,0)$ och $(2,-1)$
- (c) $\iint_D \frac{x-y+1}{x+y} dx dy$, där D bestäms av att $1 \leq x+y \leq 2x-4y \leq 3$
- (d) $\iint_D x^2 dx dy$, där D är parallelogrammen med hörn i $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,5)$ och $(2,4)$
- (e) $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2-y^2)^2}$, där D är triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(3,1)$
- 10.3** (a) $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$, där D är ellipsskivan $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$
- (b) $\iint_D x^3 dx dy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + 9y^2 \leq 9, x \geq 3y\}$
- (c) $\iint_D x dx dy$, där D bestäms av $x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
- 10.4** Låt D vara den mängd i xy -planet som ges av $x^2 + y^2 \leq 2x$. Beräkna
- (a) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ (b) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

Extrauppgifter:

- 10.5** Beräkna $\iint_D y^2 \sin y^2 dx dy$, där D ges av $1 \leq xy \leq 2$ och $0 < x \leq y \leq 2x$.

11 Lektion 11: Trippelintegraler

Om inget annat sägs i uppgifterna avser de exakt beräkning av angiven integral.

- 11.1** Låt D vara det axelparallella rätblocket med två av hörnen i $(0,0,0)$ och $(1,2,4)$ och betrakta integralen

$$I = \iiint_D (\sqrt[3]{x} + y + \sqrt{z}) dx dy dz.$$

Visa först med enkla uppskattningar, utan att beräkna integralen att $0 \leq I \leq 40$. Beräkna sedan integralen exakt.

- 11.2** $\iiint_D (x^2 + y^2)z dx dy dz$, där D är en cylinder med höjd 2, radie 3 och med z -axeln som symmetriaxel.

- 11.3** Låt D vara den mängd som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$. Skriv integralen

$$I = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$$

dels m.h.a. stavar: $I = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$ (ange $\tilde{D}$, $A(x,y)$ och $B(x,y)$),

dels m.h.a. skivor: $I = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z) dx dy \right) dz$ (ange a , b och D_z),

och räkna sedan ut den på valfritt sätt då $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

11.4 Låt D vara den mängd som begränsas av planet $x + y + z = 1$ och koordinatplanen. Skriv

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} \quad \text{som} \quad I = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx$$

och beräkna även integralens värde.

11.5 Beskriv mängden $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq y \leq x^2 \leq 1\}$ genom att projicera den på

- (a) x -axeln och ange alla icke-tomma skivor (chips?) D_x för konstant x
- (b) y -axeln och ange D_y (c) z -axeln och ange D_z
- (d) xy -planet och ange alla icke-tomma stavar (pommies?) D_{xy} för konstant (x, y)
- (e) xz -planet och ange D_{xz} (f) yz -planet och ange D_{yz} .

11.6 $\iiint_D \frac{z}{1+x^2} dxdydz$, där D är mängden i övning 11.5.

11.7 $\iiint_D 2x dxdydz$, där D är den begränsade mängden i positiva oktanten mellan koordinatplanen, planet $y - z = 0$ och ytan $z = 4 - x^2$.

11.8 (a) $\iiint_D (z^2 - x^2 - y^2) dxdydz$ över enhetsklotet

(b) $\iiint_D x e^{x^2+y^2+z^2} dxdydz$ över den del av enhetsklotet som ligger i halvrummet $x \geq 0$

(c) $\iiint_D x dxdydz$, där $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$

11.9 (a) $\iiint_D (y - x - z) dxdydz$, där D är den parallelepiped som bestäms av de tre dubbelolikheterna $0 \leq x + y + z \leq 1$, $0 \leq x + 2y + 3z \leq 1$ och $0 \leq x + 4y + 9z \leq 1$.

(b) $\iiint_D x dxdydz$, där D är tetraedern med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$.

Extrauppgifter:

11.10 $\iiint_D (y^2 + z^2) dxdydz$, där D är den cirkulära (enkel)konen med spetsen i origo, z -axeln som symmetriaxel samt höjd 1 och radie 2. (Värdet är konens tröghetsmoment m.a.p. x -axeln)

11.11 $\iiint_D y e^z dxdydz$, där $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y \leq z \leq x + y, |x| + |y| \leq 1\}$.

12 Lektion 12: Area och Volym.

12.1 Beräkna arean av (a) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x + 2y| + |3x - y| \leq 1\}$
 (b) den begränsade mängden mellan kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x^2$ och $y = 4x^2$ i $\mathbf{R}^2$

12.2 (a) Räkna ut volymen av ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, där a , b och c är positiva konstanter.

(b) Vilken volym har mängden innanför ytan $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz = 1$?

12.3 Beräkna volymen av den tetraeder som avgränsas av planen $2x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 0$, $x + y + 2z = 0$ och $x + y + z = 4$.

12.4 (a) Bestäm volymen av den del av elliptiska cylindern $9x^2 + 4y^2 \leq 36$ som ligger mellan planen $x + y + z = 10$ och $x + y - z = 10$.

(b) Vilket rymdmått har den begränsade mängden mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $2x + 2y + z = 1$?

- 12.5** Insidan av ett glas är en paraboloid $z = x^2 + y^2$, där enheten är cm. Beräkna volymen av en vätska i glaset då det fylls till höjden 5 cm från insidans botten.
- 12.6** Genom en rät cirkulär kon med höjd h och radie $2a$ borrar ett cylindriskt hål vinkelrätt mot konens basyta så att skärningen med denna är en cirkel med en radie i basytan som diameter, d.v.s. konens symmetriaxel är en linje som ligger i cylinderns mantelyta. Beräkna volymen av det som är kvar av konen.

Extrauppgifter:

- 12.7** Låt D vara den mängd i positiva oktanten som avgränsas av ytan $x + y^2 + z = 1$ och koordinatplanen. Låt V beteckna volymen av D .
- (a) Visa att D är en del av enhetskuben $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Mellan vilka gränser måste V därmed ligga?
- (b) Beräkna V exakt.
- 12.8** Beräkna volymen av $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq y^2, y \geq x^2, x \geq z^2\}$.
- 12.9** Beräkna volymen av skärningsmängden av (a) två cylindrar (b) tre cylindrar som har samma radie $a > 0$ och ligger så att deras axlar har en gemensam punkt där de skär varandra vinkelrätt.
- 12.10** I ett klot med radie a borrar två cylindriska hål med radie $a/2$ så att de tangerar varandra längs en linje genom klotets medelpunkt. Beräkna volymen av det som är kvar av klotet.

13 Lektion 13: Massa och tyngdpunkter

Det kommer inte krävas att man kan formlerna för massa och tyngdpunkter utantill på tentan. Denna lektion är också tänkt att vara ett uppsamlingstillfälle, varför det är relativt få uppgifter.

- 13.1** Beräkna massan av ett halvklot där densiteten i en punkt (x, y, z) är (a) en konstant ρ (b) en konstant k gånger avståndet från (x, y, z) till motsvarande hela klots medelpunkt.
- 13.2** Beräkna massan av innehållet i en 8 m hög cylindrisk silo med radie 3 m, om densiteten är $(10 - h)^2(4 - \rho)$ kg/m³ i en punkt h m från botten och ρ m från silons lodräta axel.
- 13.3** Bestäm tyngdpunkten för ett halvklot där densiteten (a) är konstant (b) i en punkt är proportionell mot avståndet från punkten till motsvarande hela klots medelpunkt.
- 13.4** Bestäm z -koordinaten för tyngdpunkten för en tetraeder med hörn i $(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0)$ och $(0, 0, h)$, där $a > 0, b > 0$ och $h > 0$, och densiteten är konstant.

Svar

Lektion 1: Delmängder till $\mathbf{R}^n$

- 1.1 (a) Den slutna övre halvan av enhetscirkelskivan.
(b) Tårtbiten $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ utskuren ur ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 2$.
Randpunkterna är punkterna på de kurvstycken som begränsar mängderna.
- 1.2 (a) Kvadraten med hörn i $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$, exklusive kvadratens sidor
(b) Kvadraten med hörn i $(\pm 1, \pm 1)$ (fyra punkter), inklusive kvadratens sidor
- 1.3 (a) Cirkeln med medelpunkt $(1, 2)$ och radie 4. (b) De två linjerna $x + 2y = \pm 2$.
Inre punkter saknas. Randpunkterna är punkterna i respektive mängd.
- 1.4 Övning 1.1 (a) Ej öppen; slutet; begränsad (b) Ej öppen; ej slutet; begränsad
Övning 1.2 (a) Öppen; ej slutet; begränsad (b) Ej öppen; slutet; begränsad
Övning 1.3 (a) Ej öppen; slutet; begränsad (b) Ej öppen; slutet; ej begränsad
- 1.5 (a) En del av en cirkelring i första kvadranten
(b) Två begränsade områden i första och tredje kvadranterna som avgränsas av fyra hyperbler.
- 1.6 (a) Tetraedern med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$
(b) Den del av enhetssfären som ligger i positiva oktanten
(c) En dubbel glass-strut
(d) En cirkelskiva vars randcirkel går genom $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$, bl.a.

1.7 Punkten $(1, 1)$

- 1.8 (a) M är intervallet $]0, 1]$ i $\mathbf{R}$, inre punkter är $]0, 1[$, randpunkter är 0 och 1
(b) M är hela $\mathbf{R}$, inre punkter är hela $\mathbf{R}$, randpunkter saknas
(c) M är tom, inre punkter saknas, randpunkter saknas
(d) M är en lodrät strimma i $\mathbf{R}^2$. Inre punkter är alla punkter i M . Randpunkter är alla punkter på linjerna $x = 0$ och $x = 1$, som begränsar strimman
(e) M är sträckan mellan $(0, 0)$ och $(1, 0)$ i $\mathbf{R}^2$ utom ändpunkterna. Inre punkter saknas och randpunkter är alla punkter på sträckan inklusive ändpunkterna

1.9 Öppna: (b), (c), (d) Slutna: (b), (c) Begränsade: (a), (c), (e)

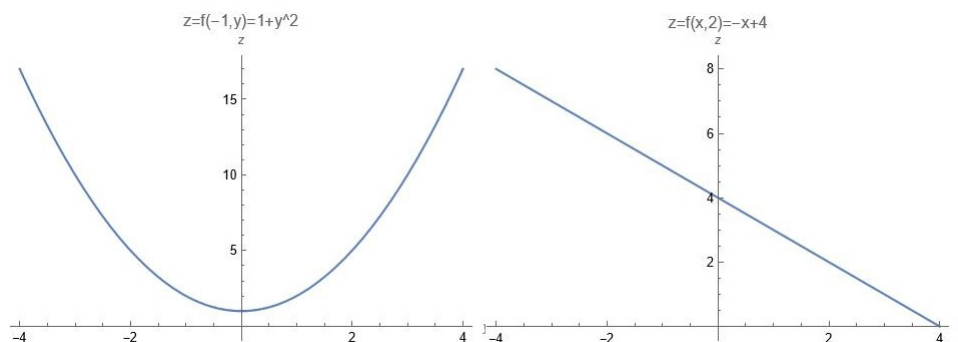
1.10 Nej

Lektion 2: Funktioner

2.1 (a)

$\begin{smallmatrix} & y \\ x \end{smallmatrix}$	-2	-1	0	1	2
-2	6	3	2	3	6
-1	5	2	1	2	5
0	4	1	0	1	4
1	3	0	-1	0	3
2	2	-1	-2	-1	2

(b)



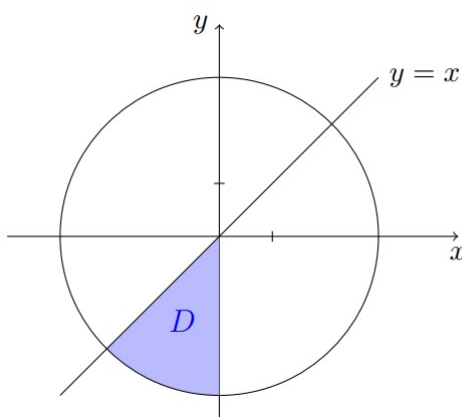
(c) De kurvor som ritats ut är $z = f(x, c)$ i planet $y = c$ respektive $z = f(c, y)$ i planet $x = c$ för $c = -2, -1, 0, 1, 2$. Punkterna i värdetabellen ligger i skärningspunkterna mellan de olika kurvorna (punkten $(-2, -2, f(-2, -2))$ ligger i punkten där kurvorna $z = f(-2, y)$ och $z = f(x, -2)$ skär varandra osv.)

- 2.2** (a) Ett plan (b) En (enkel)kon med z -axeln som symmetriaxel och spets $(0, 0, 0)$
 (c) En paraboloid med z -axeln som symmetriaxel (d) Övre halvan av enhetssfären

2.3 $D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$, $V_f = [-2, \infty[$.

- 2.4** (a) Nivåkurvorna är parallella linjer med normal $(1, 2)$. Ytan är ett plan med normal $(1, 2, -1)$.
 (b) Ingen nivåkurva för $C = -2$. $C = -1$ ger punkten $(1, 0)$. $C = 0, 1$ och 2 ger cirklar med medelpunkt $(1, 0)$ och radie $1, \sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$, respektive. Ytan är en paraboloid med vertex i $(1, 0, -1)$.
 (c) Nivåkurvorna är koordinataxlarna om $C = 0$, annars hyperbler med koordinataxlarna som asymptoter. Ytan är en hyperbolisk paraboloid (sadelyta).
 (d) Inga nivåkurvor om $C = -2$ eller -1 . $C = 0$ ger punkten $(0, 0)$. $C = 1, 2$ ger ellipser. Ytan är en elliptisk paraboloid (kramad skål).

- 2.5** (a) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.
 (b)



(c) $\rho \cos^2 \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi)$.

- 2.6** (a) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$, $\theta = \pi/2$.
 (b) $\frac{\cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} r$.

2.7 $D_f = \{(x, y, z) : xz > -1 \text{ och } y > 0\}$, $V_f =]0, \infty[$.

Lektion 3: Gränsvärden och kontinuitet.

3.1 (a) 0 (b) Existerar ej (c) 0 (d) Existerar ej

3.2 (a) 1 (b) 0 (se efter vad nämnaren och täljaren går mot)

3.3 (a) Existerar ej (b) 0

3.4 (a) 0 (b) 0 (c) Existerar ej

3.5 1

3.6 f är kontinuerlig i alla punkter utom origo. Ja, $f(0, 0) = 0$.

3.7 (a) $f(0, 0) = 1$ (b) Nej (c) $f(0, 0) = 3$

3.10 (a) Nej (b) $f(-1, 0, 0) = 0$

Lektion 4: Differentierbarhet. Partiella derivator.

4.1 (a) $f'_x = 1 + 3x^2y + 2xy^3$, $f'_y = x^3 + 3x^2y^2 + 5y^4$

(b) $f'_x = -\frac{2x}{1-x^2-2y^2}$, $f'_y = -\frac{4y}{1-x^2-2y^2}$

(c) $f'_x = -\frac{2y}{(x-y)^2}$, $f'_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$

4.2 (a) $f'_x = 2xy^3z^4$, $f'_y = 3x^2y^2z^4$, $f'_z = 4x^2y^3z^3$

(b) $f'_x = -y \sin(xy - z^2)$, $f'_y = -x \sin(xy - z^2)$, $f'_z = 2z \sin(xy - z^2)$

(c) $f'_x = -\frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{z}}$, $f'_y = \frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{z}}$, $f'_z = -\frac{1}{2z\sqrt{z}} \arctan \frac{y}{x}$

()

4.3 $f''_{xx} = 6xy + 2y^3$, $f''_{xy} = 3x^2 + 6xy^2$, $f''_{yx} = 3x^2 + 6xy^2$, $f''_{yy} = 6x^2y + 20y^3$

4.4 (a) $z = x^2 + xy + y^2 + C$ (b) Lösning saknas (c) $z = y(1 + e^x) + C$

4.5 (a) $u = xy + 3xz + 2yz - 3x - 2y - z + C$ (b) $u = x + (y + z)e^z - \cos xy + C$ (c) Saknas

4.6 (a) $z = g(y)$ (b) $z = g(x)$ (c) $z = g(y)x + h(y)$

(d) $z = g(x) + h(y)$ (e) $z = g(y)e^x$ (f) $z = g(y)e^{xy}$

(Här är g och h godtyckliga C^2 -funktioner av en variabel)

4.7 (a) $z = 7x + 4y - 10$ (b) $z = 2x$ (c) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

4.8 $P = 50$ W och (a) ökar med ca 0,5 W (b) minskar med ca 2 W

4.10 (a)

$$f'_x = \begin{cases} 1 & \text{i } (0, 0), \\ \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{annars;} \end{cases} \quad f'_y = \begin{cases} 0 & \text{i } (0, 0), \\ \frac{4x^2y^3 + 2y^5 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{annars.} \end{cases}$$

Lektion 5: Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer.

5.1 (b) $z'_x(x, y) = f'(x - y)$, $z'_y(x, y) = -f'(x - y)$ (c) $f(t) = \sin t$ respektive $f(t) = 1 + te^{-t}$

5.2 $z'_x(x, y) = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$, $z'_y(x, y) = -f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y^2}$. Ja, med $f(t) = t - \frac{1}{t}$

5.3 (a) $\begin{cases} z'_x = z'_u + yz'_v \\ z'_y = z'_u + xz'_v \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z'_x = 2xz'_u + 2yz'_v \\ z'_y = -2yz'_u + 2xz'_v \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z'_x = 2yz'_u \\ z'_y = 2xz'_u - z'_v/y^2 \end{cases}$

5.4 (a) $2z'_v = 0$ ger $z = g(u) = g(x - y)$, g deriverbar (b) $z = y - x - \cos(x - y)$

5.5 (a) 2 respektive 0 (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$. Olika saker hålls konstanta (y respektive u)

5.6 $z'_v = -1 - u/v^2$ ger $z = xy - y + g(xy^2)$, där $g \in \mathcal{C}^1$. $z = xy - y + e^{-y\sqrt{x}}$

5.7 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v}$

5.8 (a) $z''_{vv} = 6u - 12v$ som ger $z = 4x^3 + 3x^2y + xg(2x + y) + h(2x + y)$ där $g \in \mathcal{C}^2$, $h \in \mathcal{C}^2$

(b) $z = 4x^3 + 3x^2y + xg(2x + y) + e^{-(2x+y)^2}$ där $g \in \mathcal{C}^2$

(c) $z = 4x^3 + 3x^2y + 4x(2x + y)e^{-(2x+y)^2} + e^{-(2x+y)^2}$

(d) $z = 16x^3 + 15x^2y + 3xy^2 + Cx(2x + y)^3$ (om vi antar att $z \in \mathcal{C}^3$)

5.9 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + u\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}$

5.10 $2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \frac{uv}{2}$, som ger $z = \frac{x^2}{4} + g(2xy) + h(1/y) = \frac{x^2}{4} + \tilde{g}(xy) + \tilde{h}(y)$

5.11 $(z'_x)'_u = (y)'_u = (\sqrt{u/v})'_u = 1/(2\sqrt{uv}) = 1/(2x)$, medan $(z'_u)'_x = (1)'_x = 0$

Lektion 6: Riktningssderivator. Gradienter. Geometriska tillämpningar

6.1 (a) $(1, 2, 3)$ (b) $((y^2 - xy^3)e^{-xy}, (2xy - x^2y^2)e^{-xy})$

6.3 Tangenten $11x + 5y = 17$, normalen $5x - 11y = 21$

6.4 (a) $2x + y = 2$ och $y - x = 2$ (två tangentlinjer) (b) Finns inga! (c) $2x + y = -2$

6.5 $\pm(2, 1)$, i båda fallen $\pi/2$

6.6 (a) $3x - 4y - 3z = 20$ (b) $4x - 4y + z = -8$

6.7 (a) $\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) \in \mathbf{R}^2$ pekar i den riktning i xy -planet där f växer snabbast.

(b) $\nabla F(x, y, z) = (f'_x, f'_y, -1) \in \mathbf{R}^3$ är en normalvektor till ytan S .

6.8 (a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

6.9 Den avtar med hastigheten $\frac{72}{\sqrt{14}}$ enheter per längdenhet

6.10 $(1, \pm\sqrt{2})$

6.11 $\pm\left(\frac{5}{\sqrt{13}}, -\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

6.12 $x + 2y + 3z = 6$ och $x + 2y - 3z = 6$

6.13 Björnen bör lufsa i en riktning som pekas ut av vektorn $(-4, -1)$. Temperaturen sjunker $5\sqrt{17}/6 \approx 3,4$ °C/km respektive $3\sqrt{17}/20 \approx 0,62$ °C/min i denna riktning i punkten $(1, -2)$.

6.14 $C = 11$

Lektion 7: Inversa och implicita funktioner

7.1 Funktionalmatrisen $= \begin{pmatrix} 3 \cos \psi & -3t \sin \psi \\ 2 \sin \psi & 2t \cos \psi \end{pmatrix}$, funktionaldeterminanten $= 6t$

7.2 Funktionalmatrisen $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, funktionaldeterminanten $= -35$; inverterbar

7.3 $y'(x) = -\frac{3x^2 + y - 1}{3y^2 + x - 1}$ i samtliga deluppgifter

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ (b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (c) $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

7.4 (a) $x'(y) = \frac{2x(y)y}{x(y)^2 - y^2}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

(b) $x''(y) = \frac{2x'(y)y + 2x(y)}{x(y)^2 - y^2} - \frac{2x(y)y(2x(y)x'(y) - 2y)}{(x(y)^2 - y^2)^2}$, $x''(0) = 2$, lokalt minimum

(c) $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ (två punkter). Ja

7.5 $z'_x(x, y) = \frac{y - z^2}{2(1 + (x + y)z + \tan^2 2z)}$, $z'_y(x, y) = \frac{x - z^2}{2(1 + (x + y)z + \tan^2 2z)}$,

$z(1, -1) = \pi$, $z'_x(1, -1) = -\frac{\pi^2 + 1}{2}$, $z'_y(1, -1) = -\frac{\pi^2 - 1}{2}$

7.6 $x'(y) = \frac{(z - y)x}{(x - z)y}$, $z'(y) = \frac{(y - x)z}{(x - z)y}$, $x(2) = 1$, $z(2) = 3$, $x'(2) = -\frac{1}{4}$, $z'(2) = -\frac{3}{4}$

7.7 $(1, -1, 0)$

7.9 $x'_y(y, z) = -\frac{2xy}{5x^4 + y^2 + z^4}$, $x'_z(y, z) = -\frac{4xz^3}{5x^4 + y^2 + z^4}$

Lektion 9: Dubbelintegraler

9.1 (b) $\frac{25}{28} \leq I \leq \frac{7}{3}$

9.2 (a) $\frac{8}{3}$ (b) $6 \ln 2 - 3 \ln 3 = \ln \frac{64}{27}$

9.3 $\iint_D (xy + y^2) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2x} (xy + y^2) dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^2 (xy + y^2) dx \right) dy = \frac{56}{3}$.

9.4 (a) $-\frac{1}{2}(e^4 - 4e^2 - 1)$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{e - 1}{2}$ (d) $\frac{4}{5} \ln \frac{33}{32}$ (e) $\ln \frac{32}{27}$ (f) $1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{2}$

9.5 (a) $\frac{9}{4}$ (b) $12 \sin 2 - 2 \cos 2 - 10$ (c) $-\frac{1}{8}$

9.6 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$

9.7 (a) $\frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{4}$ (b) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

9.8 $\frac{45a^4}{2}$

Lektion 10: Variabelbyten i dubbelintegraler

10.1 (a) $\pi(e^4 - 1)$ (b) $-\frac{2 \ln(1 + 2\sqrt{2})}{3}$ (c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

10.2 (a) $\frac{\sin 1}{3}$ (b) $2(e^4 - 1)$ (c) $\frac{3 \ln 3}{4} - \frac{1}{3}$ (d) $\frac{100}{3}$ (e) $\frac{\ln 3}{2}$

10.3 (a) $\frac{39\pi}{2}$ (b) $\frac{121\sqrt{2}}{9}$ (c) $\frac{1}{9}$

10.4 (a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{32}{9}$

10.5 $\frac{3 \sin 2 - \sin 4 - 2 \sin 1}{4}$

Lektion 11: Trippelintegraler

11.1 Eftersom integranden är positiv på D följer det direkt att $I \geq 0$. Å andra sidan ser vi enkelt att D har volym 8 och största värdet integranden antar på D är 5. Alltså gäller $I \leq 8 \cdot 5 = 40$. Det exakta värdet är $74/3$.

11.2 $81\pi(a + 1)$, där a är bottenskivans z -nivå

11.3 $\tilde{D}$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $A(x, y) = x^2 + y^2$ och $B(x, y) = 1$;
 $a = 0$, $b = 1$ och D_z är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq z$ (för fixt z);
 $I = \frac{4\pi}{21}$

11.4 $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$

11.5 (a) D_x är triangeln med hörn $(x, 0, 0)$, $(x, x^2, 0)$ och (x, x^2, x^2) ; projektionen är $-1 \leq x \leq 1$.

(b) D_y består av två rektanglar: den enas hörn är $(\sqrt{y}, y, 0)$, $(1, y, 0)$, $(1, y, y)$ och $(\sqrt{y}, y, y)$, den andras hörn fås genom att byta tecken på alla x -koordinater i den förstas; projektionen är $0 \leq y \leq 1$.

(c) D_z består av två delar: den ena avgränsas av sträckan mellan $(\sqrt{z}, z, z)$ och $(1, z, z)$, sträckan mellan $(1, z, z)$ och $(1, 1, z)$ och parabelbiten $y = x^2$ mellan $(\sqrt{z}, z, z)$ och $(1, 1, z)$, den andra delen fås genom att byta tecken på alla x -koordinater i den första delen; projektionen är $0 \leq z \leq 1$.

(d) D_{xy} är sträckan mellan $(x, y, 0)$ och (x, y, y) ; projektionen är $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$.

(e) D_{xz} är sträckan mellan (x, z, z) och (x, x^2, z) ; projektionen är $0 \leq z \leq x^2 \leq 1$.

(f) D_{yz} är sträckan mellan $(-1, y, z)$ och $(-\sqrt{y}, y, z)$ och sträckan mellan $(\sqrt{y}, y, z)$ och $(1, y, z)$; projektionen är $0 \leq z \leq y \leq 1$.

11.6 $\frac{1}{3} \left(\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4} \right)$

11.7 $\frac{32}{3}$

11.8 (a) $-\frac{4\pi}{15}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{9(2 - \sqrt{2})\pi}{16}$

11.9 (a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{6}$

11.10 $\frac{8\pi}{5}$, oavsett om konen pekar uppåt eller nedåt

11.11 $\frac{1}{e}$

Lektion 12: Area och Volym.

12.1 (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{\ln 2}{3}$

12.2 (a) $\frac{4\pi abc}{3}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$

12.3 $\frac{512}{3}$

12.4 (a) 120π (b) $\frac{9\pi}{2}$

12.5 $\frac{25\pi}{2} \text{ cm}^3$

12.6 $a^2 h \left(\frac{\pi}{3} + \frac{16}{9} \right)$

12.7 (a) $0 \leq V \leq 1$ (b) $V = \frac{4}{15}$

12.8 $\frac{1}{7}$

12.9 (a) $\frac{16a^3}{3}$ (b) $8a^3(2 - \sqrt{2})$

12.10 $\frac{16a^3}{9}$

Lektion 13: Massa och tyngdpunkter

13.1 (a) $\frac{2\pi\rho R^3}{3}$ (b) $\frac{\pi k R^4}{2}$ (R är halvklotets radie)

13.2 $5952\pi \text{ kg} \approx 19 \text{ ton}$

13.3 (a) $\left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$ (b) $\left(0, 0, \frac{2R}{5}\right)$ i ett koordinatsystem där halvklotet har den plana ytan i xy -planet och den högsta punkten på positiva z -axeln (radien är R)

13.4 $\frac{h}{4}$