

TATB09 Flervariabelanalys Del C: Lokala extrempunkter och optimering (UPG1)

Tomas Sjödin

26 maj 2025

Innehåll

C1	Introduktion	1
C2	Taylors formel. Lokala extrempunkter	3
	C2.1 Polynom i flera variabler	4
	C2.2 Taylors formel	4
	C2.3 Några ord om beviset av Taylors sats*	6
	C2.4 Taylorpolynom av högre grad*	6
	C2.5 Lokala extrempunkter	6
C3	Kurvor och ytor på parameterform	9
	C3.1 Kurvor på parameterform	9
	C3.2 Ytor på parameterform	10
C4	Optimering på kompakta områden	12
	Appendix: Teckenkaraktär via kvadratkomplettering	16

C1 Introduktion

Optimering handlar om att givet en reellvärd funktion f definierad på en delmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ försöka besvara följande frågor:

- (E1) Avgör om f antar ett största (eller minsta) värde på D .
- (E2) Givet att ett största (eller minsta) värde antas, bestäm i så fall detta, samt i vilka punkter det antas.

- Funktionen f som ska "optimeras" kallas ibland **målfunktion**.
- Villkoret att $\bar{x}$ ska ligga i D kallas ibland en **begränsning**, eller ett **bivillkor**.

(När det gäller den andra punkten ovan menas oftast när man säger bivillkor typiskt att D ges på ett speciellt sätt, vilket vi inte kommer tala om i denna kurs.)

I denna kurs kommer vi **enbart** titta på fallet då D är kompakt, dvs. sluten och begränsad, och att f är kontinuerlig på D . Vi påminner om att en **kontinuerlig funktion** på en kompakt mängd D **alltid**

antar sitt största och minsta värde någonstans i D . Så under dessa förutsättningar är alltså frågan inte om dessa antas, utan var och vad dessa värden är.

Ibland är vi också intresserade av den lokala frågan om en punkt i någon ospecificerad omgivning till denna är ett maximum eller minimum, vilket då sägs vara en lokal extrempunkt, till skillnad från ovanstående där vi letar efter globala max och min på ett givet område D .

Vi börjar med definitionen av lokala och globala extrempunkter:

Definition C1.1 (Lokala extrempunkter). Vi säger att $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ har ett lokalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D \cap B(\bar{a}, \varepsilon).$$

Med omvänd olikhet definieras lokala minimum över D .

För lokala extrempunkter kommer vi nedan ta fram en generalisering av andraderivatatestet från envariabeln för funktioner i flera variabler, vilket baseras på Taylorutvecklingar.

Definition C1.2 (Globala extrempunkter). Vi säger att $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ har ett globalt maximum över D i punkten $\bar{a} \in D$ om

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in D.$$

Med omvänd olikhet definieras globala minimum över D .

Angående terminologin har vi ovan valt formuleringen ”över” D . En annan ekvivalent formulering vi kommer använda är ”extrempunkt till $f(\bar{x})$ då $\bar{x} \in D$ ”, vilket betyder samma sak.

Givetvis är en global extrempunkt över D också en lokal extrempunkt över D . I optimeringsproblemet är vi alltså främst intresserade av att hitta globala extrempunkter.

Som ett exempel i en variabel kan vi säga att $f(x) = x^2$ har lokala maximum över $[-1, 3]$ i både -1 och 3 , men bara i den senare har vi ett globalt maximum. Notera vidare att mängden D är väldigt central i dessa problem. Till exempel om vi byter ut $[-1, 3]$ ovan mot $[-2, 4]$ så ändras förstas maxvärdet. Notera också att varken -1 eller 3 längre är lokala extrempunkter till f över $[-2, 4]$.

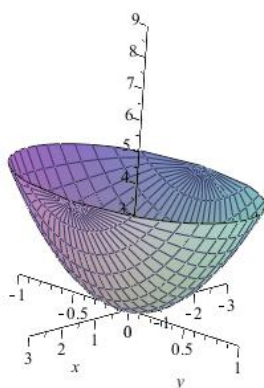
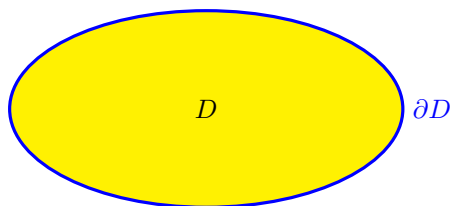
Det är också värt att poängtera att optimeringsproblemet oftast kommer formuleras som ”Bestäm största och minsta värdet av $f(\bar{x})$ för $\bar{x} \in D$ ” (det är då underförstått att vi också vill veta var dessa antas). Detta betyder i så fall samma sak som ”Bestäm alla globala extrempunkter till f över D och funktionsvärdet i dessa”.

Eftersom vi nu alltså antagit att D är kompakt och f är kontinuerlig kan frågorna (E1) och (E2) ovan formuleras som: bestäm de globala extrempunkter till f över D samt funktionsvärdena i dessa (dvs. vad är max/min). Det kan mycket väl finnas mer än en punkt där ett globalt maximum/minimum antas. Om till exempel f är konstant är alla punkter $\bar{a} \in D$ både globala maximum och globala minimum till f .

Vi kan börja med ett illustrerande exempel där vi direkt kan se svaret på frågorna:

Exempel C1.3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ över området

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$



Vi kan här direkt se från grafen att vi har ett globalt minimum $0 = f(0, 0)$ i origo, som är en inre punkt till D , och ett globalt maximum $4 = f(a, b)$ i alla punkter (a, b) på ∂D .

Vi kan alltid dela upp $D = D^\circ \cup \partial D$ där D° är de inre punkterna till D och ∂D randpunkterna. (Notera att vi inte utesluter att D° är tom, till exempel om D är en kurva i två eller fler dimensioner. Randen ∂D är aldrig tom om D är kompakt.)

Det finns nu tre olika möjligheter för en extrempunkt $\bar{a}$ till f över D :

- (K1) $\bar{a} \in D^\circ$ och f är inte differentierbar i $\bar{a}$,
- (K2) $\bar{a} \in D^\circ$, f är differentierbar i $\bar{a}$ och $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$,
- (K3) $\bar{a} \in \partial D$, och f har en lokal extrempunkt över ∂D .

Notera att vi inte säger omvändningen att alla punkter som uppfyller (K1), (K2) eller (K3) ovan är globala extrempunkter, utan bara att alla extrempunkter måste uppfylla något av dessa, vilket ger oss ett sätt att systematiskt försöka hitta **kandidater** till globala extrempunkter.

Vi kommer i denna kurs inte fokusera på punkterna i (K1), utan kommer anta att f är differentierbar i D° .

När det gäller (K2) så kallas punkter som uppfyller $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ stationära eller kritiska. Att vara stationär är för en punkt i D° , som vi ska se nedan, ett nödvändigt (men inte tillräckligt) krav för att kunna vara en extrempunkt. Det är dock inte ett krav på ∂D (jämför med ovanstående exempel där minimum togs i en inre punkt där gradienten är noll, medan den inte är noll på randen där maximum antas).

När det gäller undersökningen av randpunkterna blir det första steget att först (eventuellt) dela upp randen i bitar som man sedan behandlar var och en för sig. Denna behandling kommer vi i denna kurs göra via en lämplig parametrisering av randen, vilket då reducerar problemet för dessa till ett i färre variabler.

C2 Taylors formel. Lokala extrempunkter

Vi kommer nedan vara intresserade av att förstå en reellvärd funktion f lokalt kring en **inre punkt** $\bar{a}$ till f 's definitionsområde, så det är ett stående antagande i detta kapitel att $\bar{a}$ är en sådan punkt.

C2.1 Polynom i flera variabler

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal. Graden av $x^k y^l$ är $k + l$, och graden av ett polynom definieras som den högsta graden av dess termer. Så t ex. är

$$p(x, y) = 3x^3 + 4x^2 y^4 + y^2$$

ett polynom av grad 6 (mittentermen har högsta grad 2 + 4).

Polynom av flera variabler definieras på ett analogt sätt, så t ex. är

$$p(x, y, z) = 3x^2 z - 4yz^3 + 7xy^3 z^4$$

ett polynom av grad $1 + 3 + 4 = 8$ i tre variabler.

C2.2 Taylors formel

Givet en reellvärd funktion f av n variabler så definierar vi det k :te **Taylorpolynomet** till f i en punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ som det unika polynom p_k av grad högst k och sådant att p_k och alla dess partialderivator upp till och med ordning k är lika med motsvarande för funktionen f i punkten $\bar{a}$. Följande sats kan visas, som generaliserar satsen från envariabelanalysen:

Sats C2.1 (Taylor)

Om f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till $\bar{a}$ upp till och med grad $k + 1$ så gäller

$$(*) \quad f(\bar{x}) = p_k(\bar{x}) + b(\bar{x})|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1},$$

där p_k är det k :e Taylorpolynomet till f i $\bar{a}$ och $b(\bar{x})$ är begränsad i någon omgivning till $\bar{a}$.

Vidare är p_k det enda polynomet av grad $\leq k$ som uppfyller (*).

Vi använder ibland också begreppet **stora ordo**:

$$b(\bar{x})|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1} = \mathcal{O}(|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1})$$

om $b(\bar{x})$ är begränsad nära $\bar{a}$. Ordokalkyl är dock ingen stor del av denna kurs, men kan ibland vara användbart för att få fram utvecklingar via standardutvecklingar från envariabelanalysen. Det kan vara värt att notera att vi t ex. i två dimensioner har, eftersom $|x| \leq |(x, y)|$ och $|y| \leq |(x, y)|$,

$$|cx^k y^l| = |c||x|^k |y|^l \leq |c|||(x, y)|^k |(x, y)|^l = |c|||(x, y)|^{k+l} = \mathcal{O}(|(x, y)|^{k+l}).$$

Det vill säga alla termer av ordning $k + l$ är $\mathcal{O}(|(x, y)|^{k+l}) = \mathcal{O}(\rho^{k+l})$. Motsvarande kan sägas även i högre dimensioner, samt för andra punkter än origo.

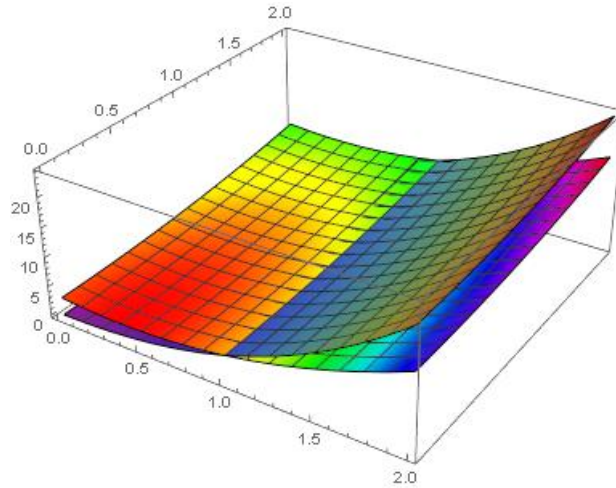
Formeln för p_k i allmänhet är lite stökig, och vi kommer **främst vara intresserade av $k = 2$** för att göra lokala undersökningar. I två variabler ges andra ordningens Taylorpolynom p_2 till f i (a, b) av

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2. \end{aligned}$$

Exempel C2.2. Om vi tittar på $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + y^2$ får vi efter lite räknande $f(1, 1) = 5$, $f'_x(1, 1) = 5$, $f'_y(1, 1) = 2$, $f''_{xx}(1, 1) = 8$, $f''_{xy}(1, 1) = 0$ och $f''_{yy}(1, 1) = 2$. Alltså gäller att Taylorpolynomet av ordning 2 till f i $(1, 1)$ ges av

$$p_2(x, y) = 5 + 5(x - 1) + 2(y - 1) + 4(x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

Här nedan är en plot av f och p_2 :



Precis som i en variabel är det ofta, såvida inte $(a, b) = (0, 0)$, värt att göra ett variabelbyte: $x = a + h$
 $y = b + k$ så att vi får **Taylor's formel**:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \\ &+ \mathcal{O}(|(h, k)|^3). \end{aligned}$$

Notera att den tredje raden ovan kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 = \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h}, \end{aligned}$$

där $\bar{h} = (h, k)$ och $H(\bar{a})$ betecknar den så kallade Hessianen till f i (a, b) .

Om vi nu har en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av n variabler, och vi låter $H(\bar{a})$ vara matrisen som på plats ij har andraderivatn

$$f''_{x_j x_i}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

då vet vi att denna matris är symmetrisk, eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi tar partialderivatorna (om vi antar att f är av klass $\mathcal{C}^2$ nära punkten $\bar{a}$). T ex. om vi får en funktion $f(x, y, z)$ av tre variabler (x, y, z) ges $H(a, b, c)$ av

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a, b, c) & f''_{xy}(a, b, c) & f''_{xz}(a, b, c) \\ f''_{xy}(a, b, c) & f''_{yy}(a, b, c) & f''_{yz}(a, b, c) \\ f''_{xz}(a, b, c) & f''_{yz}(a, b, c) & f''_{zz}(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

Då visar det sig att vi kan skriva Taylorutvecklingen av ordning två på formen

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Observera dock att i uttrycket $\nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h}$ ska $\bar{h}$ behandlas som en vektor i $\mathbb{R}^n$, medan det i matrismultiplikationen $\bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h}$ ska behandlas som en kolumnmatris.

C2.3 Några ord om beviset av Taylors sats*

I princip följer Taylors sats i flera variabler från satsen i en variabel genom att fixera $\bar{x}$ och $\bar{h} \neq \bar{0}$ och titta på funktionen

$$g(t) = f(\bar{x} + t\bar{h}/|\bar{h}|),$$

av en variabel, och använda Taylors sats från en variabel på denna, samt kedjeregeln. T ex. om vi tillämpar kedjeregeln får vi efter lite arbete

$$g'(t) = \frac{\nabla f(\bar{x} + t\bar{h}/|\bar{h}|) \bullet \bar{h}}{|\bar{h}|}$$

och

$$g''(t) = \frac{\bar{h}^t H(\bar{x} + t\bar{h}/|\bar{h}|) \bar{h}}{|\bar{h}|^2}.$$

Så med $t = 0$ får vi

$$g(0) = f(\bar{x}), \quad g'(0) = \frac{\nabla f(\bar{x}) \bullet \bar{h}}{|\bar{h}|}, \quad g''(0) = \frac{\bar{h}^t H(\bar{x}) \bar{h}}{|\bar{h}|^2}.$$

Enligt Taylors sats från envariabeln gäller

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \mathcal{O}(t^3),$$

så med $t = |\bar{h}|$ får vi

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \bullet \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^t H(\bar{x}) \bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3),$$

vilket i princip visar satsen till ordning 2 i alla fall. (Ska man vara riktigt noga får man vara lite försiktig med ordo-termen ovan eftersom det vi visar ovan bara egentligen är att vi har $\mathcal{O}(t^3) = b_{\bar{h}}(t)t^3$. Dvs. den begränsade funktionen beror på riktningen $\bar{h}$, men vi måste ha att den även är begränsad med avseende på riktningen, och därför utgår man normalt från Lagranges restterm istället.)

C2.4 Taylorpolynom av högre grad*

Om $n = 2$ har vi formeln för Taylorpolynomet av ordning k till f i (a, b) :

$$\begin{aligned} p_k(x, y) &= f(a, b) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 + \dots + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!(k-m)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^m \partial y^{k-m}}(a, b)(x - a)^m (y - b)^{k-m}. \end{aligned}$$

För ett allmänt n ges p_k av att det är det unika polynom av grad högst k sådant att för alla $k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq k$ ges koefficienten framför $(x_1 - a_1)^{k_1} (x_2 - a_2)^{k_2} \dots (x_n - a_n)^{k_n}$ av

$$\frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\bar{a}).$$

C2.5 Lokala extrempunkter

Vi skrev ju upp definitionen av lokala extrempunkter över D ovan. Här kommer vi bara titta på inre punkter till D , och då kan man säga att definitionen i viss mening inte beror på D , utan vi får följande omformulering:

Definition C2.3. Om f är en reellvärd funktion av n variabler och $\bar{a}$ uppfyller att det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon)$$

så kallas $\bar{a}$ ett **lokalt maximum** till f .

Om det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) < f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon) \setminus \{\bar{a}\}$$

så kallas $\bar{a}$ ett **lokalt strängt maximum** till f . Med omvända olikheter definieras lokala (stränga) minimum också.

Sats C2.4

Om $\bar{a}$ är ett lokalt max/min till f och f är differentierbar i $\bar{a}$, då gäller att $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

Detta följer direkt av att f annars växer i gradientens riktning och avtar i den motsatta riktningen. Punkter $\bar{x}$ där $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ kallas **kritiska eller stationära punkter** till f .

Notera antagandet att f är differentierbar i $\bar{a}$ ovan. En funktion kan mycket väl ha ett lokalt extremvärde i en punkt där gradienten inte existerar. T ex antar $f(x, y) = |x| + |y|$ sitt minsta värde 0 i $(0, 0)$. Om man får en funktion f och ska avgöra alla lokala extrempunkter så börjar man med att ta fram kandidater som är:

- kritiska punkter, dvs. där gradienten till f existerar och är $\bar{0}$,
- punkter där gradienten till f inte existerar,

och sedan får man behandla de olika punkterna var för sig. Nedan ska vi ta fram ett andraderivata-test som ofta ger svar på frågan, men det finns fall där detta inte går att tillämpa på grund av att funktionen inte är tillräckligt deriverbar så att Taylor's sats inte är tillämplig, samt ett fall där testet trots detta inte ger någon direkt information (som kan jämföras med att ha andraderivata noll i motsvarande test från envariabelanalysen). I dessa fall måste man på ett eller annat sätt försöka tillämpa definitionen direkt. T ex ovan ser vi ju direkt att

$$f(x, y) = |x| + |y| \geq 0 = f(0, 0),$$

alltså har vi per definition ett (till och med globalt) minimum i $(0, 0)$.

Om $\bar{a}$ är en kritisk punkt och f är av klass $\mathcal{C}^3$ nära $\bar{a}$ så får vi från Taylors sats att

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2} \bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2} Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Q är här den kvadratiske form som har Hessianen som matris.

Sats C2.5

Om $\bar{a}$ är en kritisk punkt till f , så gäller följande:

- Om Q är positivt definit har f ett lokalt strängt minimum i $\bar{a}$,

- Om Q är negativt definit har f ett lokalt strängt maximum i $\bar{a}$,
- Om Q är indefinit har f en sadelpunkt i $\bar{a}$.

I de fall där Q bara är (positivt eller negativt) semidefinit räcker inte andraderivatorna till för att avgöra om f har en lokal extrempunkt eller ej.

- Fallet att Q är semidefinit ska jämföras med testet för funktioner av en variabel att vi har $f'(a) = f''(a) = 0$, där vi kan ha en lokal extrempunkt eller ej. T ex $f(x) = x^4 + 1$ uppfyller $f'(0) = f''(0) = 0$ men har ett minimum i $x = 0$, men med $f(x) = x^3 - 2$ har vi också $f'(0) = f''(0) = 0$ men denna funktion har varken max eller min i $x = 0$.
- Vi har två olika sätt att avgöra teckenkaraktären på Q , antingen via egenvärden eller via kvadratkomplettering. I tillämpningar där man har tillgång till numeriska metoder verkar egenvärdesmetoden vara den som alltid används, så vi kommer fokusera på denna nedan. Nackdelen är att om vi ska räkna för hand kan det i praktiken i högre dimensioner vara svårt, om ens möjligt, att bestämma egenvärdena som ju är rötterna till det så kallade sekularpolynomet som har samma grad som antalet variabler. Vi säger lite om kvadratkompletteringsmetoden i appendixet.

För att motivera ovanstående sats, antag att $\bar{a}$ är en kritisk punkt till f . Då gäller alltså

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Antag nu till exempel att Q är positivt definit. Då finns det $C > 0$ sådant att

$$Q(\bar{h}) \geq C|\bar{h}|^2 \text{ för alla } \bar{h}.$$

Å andra sidan finns det $D > 0$ så att

$$\mathcal{O}(|\bar{h}|^3) \leq D|\bar{h}|^3$$

gäller i någon omgivning till origo. Men

$$C|\bar{h}|^2 \geq D|\bar{h}|^3 \Leftrightarrow |\bar{h}| \leq C/D,$$

så alltså måste

$$Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3) \geq 0$$

i någon omgivning till origo. Vidare får vi bara likhet nära origo om $\bar{h} = \bar{0}$.

Om Q är negativt definit istället är argumentet likartat med omvända tecken. Är Q indefinit kommer den växa kvadratisk längs någon linje genom origo, och högre ordnings termer kan inte ändra på detta lokalt längs denna linje. Å andra sidan avtar den kvadratisk längs någon annan linje, och det kan inte heller högre ordnings termer ändra på lokalt kring origo.

Det kan vara lättast att se ovanstående i specialfall. T ex. om $Q(h, k) = h^2 + 2k^2 \geq |(h, k)|^2$ kan inte högre ordnings termer ändra på att f växer lokalt kring $(h, k) = (0, 0)$ eftersom Q växer kvadratisk i alla riktningar. Har vi istället $Q(h, k) = h^2 - 2k^2$, som ju är indefinit, så kan inte högre ordnings termer ändra på att f lokalt måste växa längs h -axeln, men avta längs k -axeln. Slutligen, antag att vi har en semidefinit form, som t ex. $Q(h, k) = h^2$, då kan inte högre ordnings termer ändra på att f växer lokalt kring h -axeln, men Q kan inte kontrollera högre ordnings termer längs k -axeln (så även om testet i sig inte säger något direkt i detta fall, så får vi viktig information från längs vilka riktningar Q blir noll).

Exempel C2.6. Om vi ser på $f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$, och utvecklar denna i $(1, 1)$ ser vi att $\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y)$, så $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$. Alltså är $(1, 1)$ en kritisk punkt. Om vi nu beräknar Hessianen får vi

$$H(1, 1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1, 1) & f''_{xy}(1, 1) \\ f''_{xy}(1, 1) & f''_{yy}(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena ges nu av

$$\begin{vmatrix} -12 - \lambda & 6 \\ 6 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (-12 - \lambda)(-6 - \lambda) - 36 = 0,$$

vilket ger $\lambda = -9 \pm \sqrt{9^2 - 36}$. Eftersom bägge rötterna är negativa är alltså den kvadratiske formen $Q(h, k) = -12h^2 + 12hk - 6k^2$ negativt definit, och därför har f ett lokalt strängt maximum i $(1, 1)$.

Om vi istället vill använda metoden med kvadratkomplettering ser vi på den kvadratiske formen:

$$Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H(1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -12h^2 + 12hk - 6k^2 = -12 \left(h - \frac{k}{2} \right)^2 + 12 \frac{k^2}{4} - 6k^2 = -12 \left(h - \frac{k}{2} \right)^2 - 3k^2.$$

Vi ser då att denna är negativt definit eftersom $(h, k) \neq (0, 0) \Rightarrow Q(h, k) < 0$, och därför har f ett lokalt strängt maximum i $(1, 1)$.

C3 Kurvor och ytor på parameterform

C3.1 Kurvor på parameterform

En funktion

$$\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

från ett intervall $[a, b]$ till $\mathbb{R}^n$ är kontinuerlig, deriverbar etc. om varje funktion $r_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) är det. Om $\bar{r}(t)$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i $\mathbb{R}^n$. Vi antar nu fortsättningsvis även att $\bar{r}(t)$ är deriverbar för varje $t \in]a, b[$.

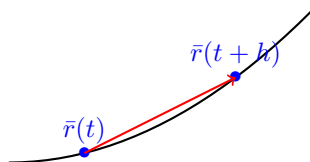
$$\bar{r}'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), \dots, r'_n(t))$$

kallas (förutom derivatan) för **hastigheten** i punkten t , och $|\bar{r}'(t)|$ kallas **farten** i t (t betecknar ofta tiden, och $\bar{r}(t)$ ett objekts läge vid tiden t).

Vi noterar också att vektorn $\bar{r}'(t)$, såvida den är skild från $\vec{0}$, är en **tangentvektor** till kurvan i punkten $\bar{r}(t)$. För att förstå detta notera att för små h gäller

$$\bar{r}'(t) \approx \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h},$$

och $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$ är en vektor med startpunkt i $\bar{r}(t)$ och slutpunkt $\bar{r}(t+h)$:



När vi låter h gå mot 0 ser vi att vektorn $(\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t))/h$ (som pekar i samma riktning som $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$) mer och mer pekar i tangenteriktningen till kurvan i $\bar{r}(t)$.

Längden s till kurvan definieras som

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt.$$

• **Speciellt för $\mathbb{R}^2$:** $\pm(r'_2(t), -r'_1(t))$ ger normalriktningar till kurvan $(r'_1(t), r'_2(t))$ (ty $(r'_1(t), r'_2(t)) \cdot (r'_2(t), -r'_1(t)) = 0$). Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi se dess graf som en parameterkurva via

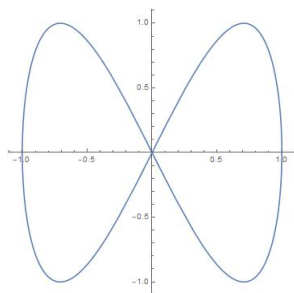
$$\bar{r}(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b].$$

Notera att vi i detta fall har

$$\bar{r}'(t) = (1, f'(t)).$$

- Antag att $\bar{r}(t)$ är en kontinuerligt deriverbar parameterkurva. Det kan vara värt att poängtera att så länge som $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$ är kurvan slät lokalt kring $\bar{r}(t_0)$ i den meningen att om vi bara tittar på den del av kurvan som ges av $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ för något tillräckligt litet $\varepsilon > 0$, så är det en slät kurva med en unik tangentlinje. För att förstå detta antag att vi ser på den plana kurvan $(x, y) = (f(t), g(t))$. Om $|(f'(t_0), g'(t_0))| \neq 0$, då måste någon av $f'(t_0)$ och $g'(t_0)$ vara skild från 0. Antag $f'(t) \neq 0$. Då kan vi lokalt invertera denna funktion $t = f^{-1}(x)$ som gäller för $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ för något tillräckligt litet $\varepsilon > 0$. Alltså har vi att $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$ lokalt, dvs. kurvan är lokalt en funktionsgraf till den kontinuerligt deriverbara funktionen $g \circ f^{-1}$.
- Det är dock möjligt för en parameterkurva att skära sig själv, dvs. $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_0)$ kan mycket väl hända för olika t_0, t_1 (tänk på tolkningen som en partikelrörelse), och då kan det ju vara så att vi inte har någon unik tangentlinje i denna punkt. Det är därför vi måste inskränka oss till $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ ovan.
- Det är också värt att notera att om $\bar{r}'(t_0) = \bar{0}$ då kan kurvan ha ett hörn, dvs. att den inte är slät. För att förstå detta kan vi tänka på grafen $y = |x| = \sqrt{x^2}$, som ju har ett hörn i origo. Om vi parametriserar denna som $x = t^3, y = \sqrt{t^6}$, dvs. $\bar{r}(t) = (t^3, \sqrt{t^6})$, då är faktiskt $\bar{r}(t)$ kontinuerligt deriverbar som funktion av t , men med derivata $\bar{0}$ i origo.

Nedan är en plot av $\bar{r}(t) = (\sin t, \sin 2t)$ för $0 \leq t \leq 2\pi$.



C3.2 Ytor på parameterform

Kom ihåg från linjär algebra att ett plan i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på parameterform som

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + u(b_1, b_2, b_3) + v(c_1, c_2, c_3),$$

där u, v är reella parametrar, (a_1, a_2, a_3) är någon punkt på planet och $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ är vektorer som är parallella med planet, men inte parallella med varandra. Om vi inför beteckningen

$$\bar{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) = (a_1 + ub_1 + vc_1, a_2 + ub_2 + vc_2, a_3 + ub_3 + vc_3)$$

betyder detta alltså att planet helt enkelt är $V_{\bar{f}}$. Det vill säga avbildningen $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametriserar planet.

Om vi nu har en allmän funktion $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ där $U \subset \mathbb{R}^2$, så kommer $V_{\bar{f}}$ typiskt också vara en yta i $\mathbb{R}^3$ som parametriserar av funktionen. Dvs. U avbildas på ytan $V_{\bar{f}}$. (Det mest uppenbara exemplet är om vi tar $f_1(u, v) = u, f_2(u, v) = v$ och $f_3(u, v) = g(u, v)$. Då blir $V_{\bar{f}}$ helt enkelt grafen till g med området $U = D_g$ som definitionsmängd).

Notera att då

$$\bar{f}(u, v) = (f_1, f_2, f_3)(u, v) \approx \bar{f}(a, b) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial(u, v)}(a, b)(u - a, v - b)$$

så ser vi att tangentplanet till ytan i $\bar{f}(a, b)$ ges på parameterform av (med $h = u - a, k = v - b$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \\ f_3(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \\ f_3(a, b) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \end{pmatrix},$$

eller ekvivalent

$$(x, y, z) = \bar{f}(a, b) + h \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right) + k \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right).$$

Det vill säga $\bar{f}(a, b)$ ger en fix punkt på planet, och

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right)$$

ger två riktningsvektorer. Ett krav för att detta ska ge ett plan är då förstås att dessa inte är parallella. Vi vet ju dessutom att detta gäller om och endast om

$$\bar{n} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right) \times \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right) \neq \bar{0},$$

och detta ger i så fall en normalvektor till ytan.

Ett alternativt sätt att se detta, notera att om vi fixerar den ena variabeln, säg $v = b$, och ser på $\bar{r}(u) = (f_1(u, b), f_2(u, b), f_3(u, b))$ då ger detta en parameterkurva som ligger på ytan hela tiden, och speciellt har vi $\bar{r}(a) = (f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$. Eftersom

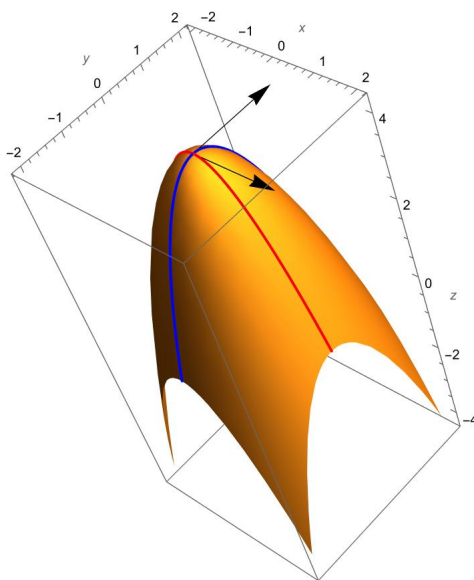
$$\bar{r}'(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right)$$

pekar i tangenriktningen till kurvan, så pekar den i en tangenriktning till ytan också i punkten $(f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$.

På samma sätt kan vi istället fixera $u = a$ och använda v som parameter för att se att

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right)$$

pekar i en tangenriktning till ytan i $(f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$.



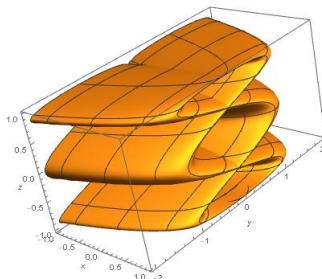
Det kan vara värt att notera att motsvarande kommentarer som de vi hade om kurvor gäller även här:

- Om vektorn $\bar{n}$ ovan inte är noll, och funktionerna är säg av klass $\mathcal{C}^1$, då finns ett $\varepsilon > 0$ så att om vi bara ser på bilden av en cirkelskiva med radie $\varepsilon > 0$ runt (a, b) så avbildas den på en slät yta. Detta är en konsekvens av implicita funktionssatsen.

- Om $\bar{n} = \bar{0}$ då behöver ytan inte vara slät även om funktionerna är $\mathcal{C}^1$.
- En parameteryta kan skära sig själv i den meningen att $\bar{f}(a, b) = \bar{f}(c, d)$ med $(a, b) \neq (c, d)$.

Nedan är en plot av parameterytan

$$(x, y, z) = (\cos 2u, \sin u + \cos 3v, \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\pi \leq v \leq \pi.$$



C4 Optimering på kompakta områden

I denna sektion antar vi att $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ där f är kontinuerlig och D är kompakt (det vill säga sluten och begränsad).

Notera att under dessa omständigheter vet vi att f antar sitt största och minsta värde på D , så frågan blir inte om globala extrempunkter existerar, utan var och vad värdet av f är i dessa.

Vi kan börja med det enkla exemplet som vi redan insett svaret på i exempel C1.3 ovan.

Exempel C4.1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ över området $D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Lösning: Eftersom enda lösningen till $\nabla f(x, y) = (2x, 8y) = (0, 0)$ är $(x, y) = (0, 0)$, som är en inre punkt till D , är detta den enda kandidaten bland de inre punkterna för ett globalt extremvärde. Värdet i denna punkt är $f(0, 0) = 0$.

Randen kan parametreras via $(x, y) = (2 \cos t, \sin t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. Om vi nu inför

$$g(t) = f(2 \cos t, \sin t)$$

har vi reducerat problemet med att hitta största och minsta värdet av f på ∂D till att hitta största och minsta värdet av g på $[0, 2\pi]$.

Notera alltså att f har ett lokalt maximum/minimum över ∂D i $(x, y) = (2 \cos t, \sin t)$ om och endast om $g(t)$ har det över $[0, 2\pi]$ i t .

I detta fall gäller

$$g(t) = (2 \cos t)^2 + 4(\sin t)^2 = 4.$$

Det vill säga vi måste ha att $f(0, 0) = 0$ är ett globalt minimum, och $f(x, y) = 4$ för alla (x, y) som uppfyller $x^2 + 4y^2 = 4$ är globala maximum till f .

Ovan var det förstås helt onödigt att införa g då det är självklart att f är konstant på ∂D , men det illustrerar den allmänna metoden vi använder i denna sektion: Hitta alla lokala stationära inre punkter, som är kandidater till globala extrempunkter, samt parametrisera upp randen vilket reducerar problemet för denna till lägre dimension.

Exempel C4.2. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - 2x - y^3$ då $0 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 4$.

Lösning: Mängden är en kvadrat. Vi börjar med att leta efter inre stationära punkter.

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, -3y^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0).$$

Punkten $(1, 0)$ är en inre punkt till vårt område så det är en kandidat för ett globalt extremvärde, och värdet är

$$f(1, 0) = -1.$$

De andra kandidaterna ligger på randen.
Randen består av linjerna

$$\begin{aligned} x = 0, \quad & -1 < y < 4, \\ x = 2, \quad & -1 < y < 4, \\ 0 < x < 2, \quad & y = -1 \\ 0 < x < 2, \quad & y = 4, \end{aligned}$$

samt fyra hörnpunkter

$$(0, -1), \quad (0, 4), \quad (2, -1), \quad (2, 4).$$

I fall som detta är det naturligt att behandla hörnen för sig. Om vi tar slutna intervall som t ex $-1 \leq y \leq 4$, så skulle vi annars behandla dessa hörnpunkter två gånger.

Vi kollar nu linjerna för sig, samt värdena i hörnen. På $x = 0$, $-1 < y < 4$ har vi

$$f(0, y) = -y^3.$$

Vi ser här att $-y^3$ som funktion på intervallet $-1 < y < 4$ har en stationär punkt i $y = 0$ (notera att då detta är ett öppet intervall är enda kandidaterna för extremvärden punkter som är stationära för envariabelfunktionen vi nu studerar). Där är funktionsvärdet

$$f(0, 0) = 0.$$

På $x = 2$, $-1 < y < 4$ gäller också $f(2, y) = -y^3$ så det ger på samma sätt som ovan en kandidat $(2, 0)$, och

$$f(2, 0) = 0.$$

På $0 < x < 2$, $y = -1$ har vi

$$f(x, -1) = x^2 - 2x + 1.$$

Funktionen $x^2 - 2x + 1$ sedd som funktion på $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$, och

$$f(1, -1) = 0.$$

På $0 < x < 2$, $y = 4$ har vi slutligen

$$f(x, 4) = x^2 - 2x - 64.$$

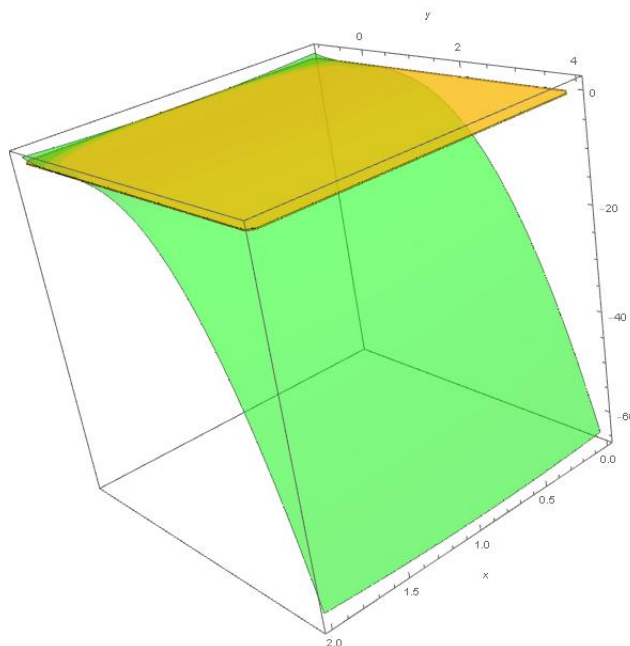
Funktionen $x^2 - 2x - 64$ som funktion på intervallet $0 < x < 2$ har en stationär punkt i $x = 1$ och

$$f(1, 4) = -65.$$

Värdena i hörnpunkterna är $f(0, -1) = -(-1)^3 = 1$, $f(0, 4) = -(4)^3 = -64$, $f(2, -1) = 1$ och $f(2, 4) = -64$.

Nu behöver vi bara bland alla dessa värden kolla vilket som var störst respektive minst. Det största är 1, och antas i punkterna $(0, -1)$ och $(2, -1)$. Det minsta värdet är -65 och antas i $(1, 4)$.

Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 4$ och den gröna grafen till $f(x, y)$ över detta område.



Exempel C4.3. Hitta största och minsta värde till $f(x, y, z) = x^2 + yz$ då $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Lösning: Området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ är kompakt. Mer precist är det området som ligger mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$. Vi har vidare att $D^\circ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z < 1\}$ och ∂D består av följande tre delar

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1, \\ z &= 1, x^2 + y^2 < 1, \\ z &= x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Det vill säga en del av en paraboloid, en cirkelskiva vid $z = 1$ och en cirkel där detta plan och paraboloiden skär varandra.

Vi börjar nu leta efter inre stationära punkter.

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, z, y) = (0, 0, 0).$$

Detta har bara lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, vilket är en randpunkt, och alltså finns inga stationära inre punkter.

Ytan $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1$ kan nu alltså parametreras med (x, y) som parametrar, och vi får

$$g(x, y) = f(x, y, x^2 + y^2) = x^2 + y(x^2 + y^2) = x^2 + x^2y + y^3, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Notera att eftersom $x^2 + y^2 < 1$ är en öppen delmängd till planet är de enda kandidaterna här stationära punkter till g .

$$\nabla g(x, y) = (2x + 2xy, x^2 + 3y^2) = (0, 0).$$

Den första koordinaten ger $2x + 2xy = 0$ som har lösningarna $x = 0$ eller $y = -1$. Insatt i ekvationen för den andra koordinaten får vi $y = 0$ respektive $x^2 + 3 = 0$ som saknar (reell) lösning. Alltså har vi kandidaten $(0, 0)$ härifrån, vilket motsvarar punkten $(0, 0, 0^2 + 0^2) = (0, 0, 0)$ på ytan:

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

Cirkelskivan $z = 1, x^2 + y^2 < 1$ kan återigen parametreras med (x, y) :

$$h(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Nu har vi $\nabla h(x, y) = (2x, 1) \neq (0, 0)$. Så det finns inga kandidater för extrempunkter här.

Cirkeln $z = x^2 + y^2 = 1$ kan slutligen parametreras av $(\cos t, \sin t, 1)$ $[-\pi \leq t \leq \pi]$ (till exempel). Vi ser då på

$$k(t) = f(\cos t, \sin t, 1) = \cos^2 t + \sin t.$$

Här får vi $k'(t) = -2 \cos t \sin t + \cos t = \cos t(-2 \sin t + 1) = 0$, vilket medför att antingen $\cos t = 0$ eller $\sin t = 1/2$. Så enda lösningarna är $\cos t = 0$ och $\sin t = \pm 1$ samt $\sin t = 1/2$, $\cos t = \pm \sqrt{3}/2$ (givetvis kan vi här i detta fall lösa ut $t = \pm \pi/2$ osv, men det är värdena av sinus och cosinus som kommer in i beräkningen av f , så värdena på t själv har vi inget behov av). Detta svarar mot punkterna $(0, \pm 1, 1)$ samt $(\pm \sqrt{3}/2, 1/2, 1)$:

$$f(0, 1, 1) = 1, \quad f(0, -1, 1) = -1, \quad f(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}, \quad f(\sqrt{3}/2, 1/2, 1) = \frac{5}{4}.$$

Vi ser alltså att bland alla våra kandidater för globala extrempunkter så har vi maximum $5/4$ i $(\pm \sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ och minimum -1 i $(0, -1, 1)$.

Exempel C4.4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x - y + yx$ då $x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

Lösning: De två bivillkoren $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 4$ och $h(x, y) = x \geq 0$ bestämmer en sluten halvcirkelskiva – alltså en kompakt mängd E – och målfunktionen $f(x, y) = x - y + xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd. *Kandidatjakt:*

- *Stationära punkter:* $\nabla f = (1 + y, x - 1) = 0$, alltså $x = 1$ och $y = -1$. Eftersom $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (1, -1)$ är en inre punkt av E . Kandidat: $f(1, -1) = 1$.
- *Kandidater på sträckan* $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ där $-2 \leq t \leq 2$: $f(x, y) = -t =: g(t)$, $g'(t) = -1 \neq 0$. Kandidater finns bara i hörnpunkterna ($t = \pm 2$): $f(0, -2) = 2$ och $f(0, 2) = -2$.
- *Kandidat på cirkelbågen.* Parametriseringen $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, ger $f(2 \cos t, 2 \sin t) = 2(\cos t - \sin t) + 4 \sin t \cos t =: h(t)$. Stationära punkter:

$$h'(t) = -2(\sin t + \cos t) - 4(\sin^2 t - \cos^2 t) = -2(\sin t + \cos t)(2 \sin t - 2 \cos t + 1).$$

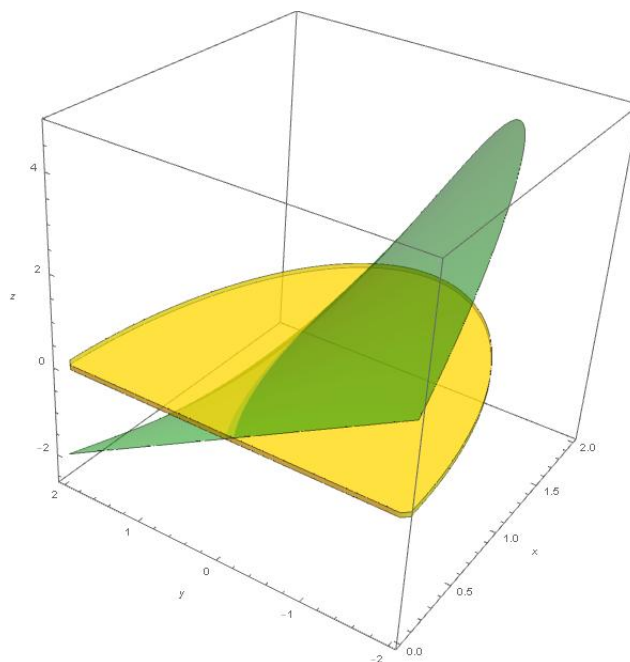
a) Om $\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \tan t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ den enda lösningen in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kandidat: $f(2 \cos \frac{\pi}{4}, -2 \sin \frac{\pi}{4}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$

b) Om $\sin t - \cos t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(t - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Den enda lösningen in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är $t = \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$ vilket ger $\cos t = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ och $\sin t = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, d.v.s. kandidaten $(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{4})$ med värde i denna punkt: $\frac{5}{2}$.

- *Kandidater i hörnpunkterna:* $f(0, -2) = 2$ och $f(0, 2) = -2$.

Svar: $f_{\max} = f(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{4}) = \frac{5}{2}$ och $f_{\min} = f(0, 2) = -2$

Nedan kan ni se en plot av situationen, där den gula delen är vårt område och den gröna grafen till $f(x, y)$ över detta område.



Appendix: Teckenkaraktär via kvadratkomplettering

Teckenkaraktären till en kvadratisk form kan avgöras med hjälp av kvadratkomplettering. Men om denna metod används **måste** kvadratkompletteringen göras **systematiskt**, vilket innebär att man väljer en första variabel att börja kvadratkomplettera med avseende på och tar med **allt** som innehåller den variabeln i första parentesen, om vi har tre eller flera variabler väljer man sedan en andra variabel att fortsätta med och tar med **allt** som innehåller denna variabel, som inte är med i den första parentesen vi skapade i första steget, osv.

T ex om vi har en kvadratisk form av två variabler $Q(x, y)$, om vi börjar med x ska den då skrivas på formen $Q(x, y) = a(x - by)^2 + cy^2$, för konstanter a, b, c , (där b och/eller c eventuellt är 0) och inte finnas kvar något x utanför parentesen.

I tre variabler om man tar ordningen att man kompletterar med avseende på x först, sedan y och sist z ska det bli på formen $Q(x, y, z) = a(x - by - cz)^2 + d(y - ez)^2 + fz^2$ för konstanter a, b, c, d, e, f .

Poängen är att man från en sådan systematisk kvadratkomplettering kan dra slutsatser om teckenkaraktären då $u = x - by, v = y$ respektive $u = x - by - cz, v = y - ez, w = z$ skulle motsvara ett linjärt basbyte (i linjär algebra-mening) och alltså få den på formen $au^2 + bv^2$ respektive $au^2 + dv^2 + fw^2$. Egentligen är det denna egenskap som är den viktiga, men det är bara uppenbart att vi får en bas om vi just får denna "triangulära" struktur. T ex är $Q(x, y) = (x + y)^2 + (2x + 2y)^2$ enbart semidefinit eftersom $Q(x, y) = 5(x + y)^2$ blir noll då $x + y = 0$, och förstås är $u = x + y, v = 2x + 2y$ inte ett basbyte då $v = 2u$. (I två dimensioner är det i och för sig bara denna typ av exempel, såvida vi bara har två parenteser, där den första parentesen är en konstant gånger den andra, som kan gå fel, men i högre dimensioner blir det betydligt mer komplicerat.)

Några exempel/kommentarer att fundera kring:

- $Q(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ är positivt definit eftersom $u = x + y, v = x - y$ svarar mot ett basbyte, så termerna kan inte båda vara noll om vi inte har $x = y = 0$. **Men vi skulle inte acceptera att man från uttrycket $(x + y)^2 + (x - y)^2$ drar slutsatsen att Q är positivt definit utan att man visar att $u = x + y, v = x - y$ ges av ett basbyte.** Därför är det bättre att skriva om så att det blir $Q(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$, som är en systematisk kvadratkomplettering.
- Om vi har fler parenteser/termer i en kvadratkomplettering än antalet variabler kan det aldrig motsvara en bas på ovanstående sätt (se exempel nedan).

- $Q(x, y) = x^2 + 4xy$ kan vi skriva som $Q(x, y) = (x+2y)^2 - 4y^2$, vilket är en systematisk kvadratkomplettering, och vi kan dra slutsatsen att Q är indefinit då den uppenbarligen tar både positiva och negativa värden, för om $x+2y = 0$ och $y \neq 0$ blir det negativt, och om $y = 0$ och $x \neq 0$ blir det positivt. Å andra sidan kan vi också skriva $Q(x, y) = x^2 + 4xy = (x+y)^2 - y^2 + 2xy = (x+y)^2 - (y-x)^2 + x^2$. Det senare är **inte** en systematisk kvadratkomplettering, och vi kan inte dra några slutsatser direkt från detta uttryck helt enkelt eftersom ett argument som ovanstående inte är uppenbart då det skulle bygga på att båda positiva termerna $(x+y)^2$ och x^2 blir 0 för att uttrycket uppenbart ska bli negativt, men detta gäller ju bara om både x och y är 0, och då blir även den negativa termen 0.
- Om vi låter $Q(h, k) = 18h^2 + 9k^2 + 24hk$, då gäller att $Q(h, k) = 9(k + 4h/3)^2 + 2h^2$, vilket är en systematisk kvadratkomplettering, och vi kan dra slutsatsen att Q är positivt definit. Å andra sidan gäller även den osystematiska kvadratkompletteringen $Q(h, k) = 9(h+k)^2 + (3h+k)^2 - k^2$, och här skulle man **felaktigt** kunna tro att Q vore indefinit på grund av olika tecken framför de kvadratiske termerna.
- Ibland kan man vara tvungen att ta en annan ordning om det är någon kvadratisk term som saknas. T ex om vi tar $Q(x, y) = 4xy + y^2$ kan vi inte börja med x utan får börja med y och skriver då $Q(x, y) = 4xy + y^2 = (y + 2x)^2 - 4x^2$.